# 数学的翻转课堂原来可以这么做

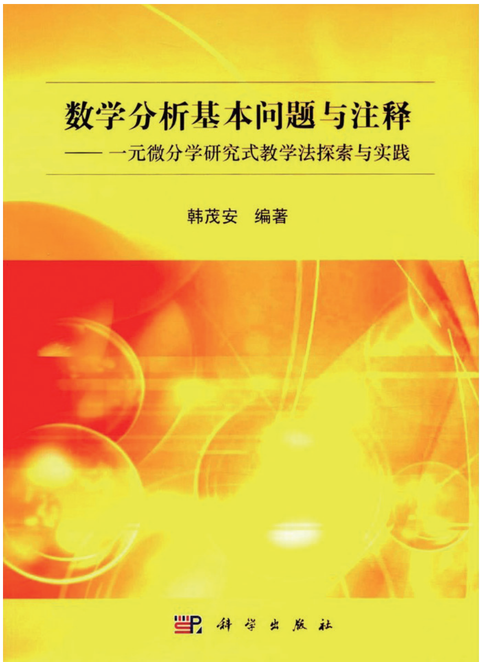
韩茂安

德国教育家第斯多惠（F. A. W. Diesterweg）说过："教学的艺术不在于传授本领，而在于善于激励、唤醒和鼓舞。"我国教育家陶行知指出："我以为好的先生不是教书，不是教学生，乃是教学生学。"荷兰数学家弗赖登塔尔（H. Freudenthal）则认为："数学教学的核心是学生的再创造。"作为大学第一线的教书者，如何能够在施教过程中体现出这些教育理念呢？传统的教学模式是以讲为主，优点是学生学习较为轻松，缺点是学生参与度较低。近十年来，国内教育界将现代传媒手段应用于课程教学，其中就有翻转课堂。这种教学模式将主动预习引入课堂之前，将指导、答疑、讨论等引入课堂之中，学生从以前的被动听讲改为主动学习。翻转课堂模式在许多大学课程都有应用，在 2010 年我们就思考：这种模式能不能用于数学课程？我们边探索边实践，先在研究生课程试行"先学后教"的教学模式，经过一轮的实践，感觉效果不错，于是我们做了进一步的发展：编写了教学配套材料（将每一节内容提炼出 5-10 个问题，让研究生带着问题课前自学），而在课堂上以答疑与要点讲解为主。经过两年的实践，效果喜人。在 2012 年我们又思考：能不能把"问题主导、自学为主、要点讲解"的教学模式用于数学本科生的教学呢？我们又开始了大胆的改革与实践，率先在数学专业的重要课程《数学分析》课上尝试"问题主导的自学研究式教学模式"，随后又陆续在《常微分方程》等课程中推广。

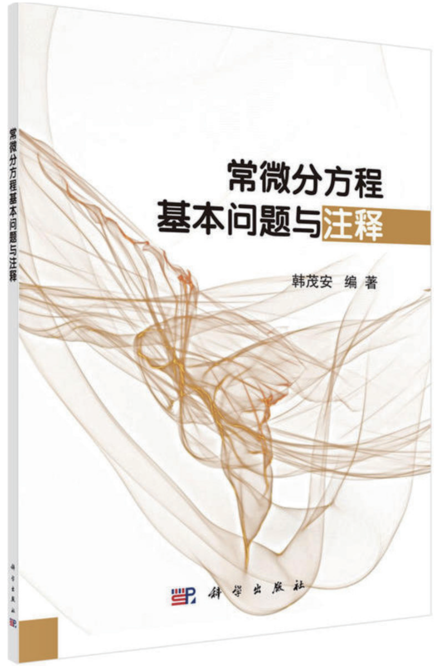
众所周知，翻转课堂的特点是学生课前自学，通常的做法是看"微课视频"，这无疑是好环节，但对内容抽象且逻辑性强的数学课来说，看微课视频不一定有好效果。于是，我们另辟蹊径，即给学生提供一本能够"引导自学、激发兴趣、通俗易懂"的学习材料，就是我们专门为配合"问题主导的自学研究式教学模式"而编写的配套材料《数学分析基本问题与注释》[1] 与《常微分方程基本问题与注释》[2]。两本配套书在内容形式上是有一定创新的，在内容编写上有独到之处。这两本书主要包括三方面的内容：

1. 基本问题（就是把课本中每节的内容通过 5 个问题提炼出来，让学生带着这些问题提前自学）；
2. 基本知识与注释（即作者对课程重点和难点的认识、理解、总结与思考，

[1] 韩茂安，数学分析基本问题与注释，科学出版社，北京，2018。
[2] 韩茂安，常微分方程基本问题与注释，科学出版社，北京，2018。




《数学分析基本问题与注释》




《常微分方程基本问题与注释》

也有对经典结果的补证与完善）；

3. 典例详解与习题演练（典例详解是我们在上习题课的过程中积累起来的，而习题演练是留给学生的课外作业）。

我们希望学生通过阅读配套书减轻学习上的压力、加深对教材的理解，同时也有助于提升学习兴趣、培养数学思维能力。

这两本书是作者在长期从事数学分析、常微分方程教学与改革的基础上经多年的积累和整理而成，特别融合了作者对教材内容在教学教法上新处理。

两书的特色主要体现在以下几个方面：

1. 关于指数函数 $a^x$，我们在中学都知道成立这样两个公式：

$$a^{x+y}=a^x a^y,\quad (a^x)^y=a^{xy},$$

其中 $a>0, a\neq 1$。对数函数与幂函数的一些性质都可以从这两个公式导出，特别有

$$\log_a b^x = x\log_a b,\quad a\neq 1,\quad b>0.$$

指数函数的上述两个公式在 [3] 中是作为第四章的定理 10 的内容而出现的，但

[3] 华东师范大学数学系，数学分析（第四版，上册），高等教育出版社，北京，2010。

只有第一个公式有详细证明，而第二式只是提示类似可证。近三十年来我讲授数学分析近十遍从没有想到去证明这第二式。在 2012 年我采用问题主导的自学研究式教学模式讲授数学分析的时候，为了预备回答学生各种可能的提问，我就想到按 [3] 的提示来证明，结果是证明不出来。这促使我翻阅其它一批数学分析教材，包括难度较大的名著 [4]，都没有找到证明，而且国内许多教材连第一个公式也不予证明。我以为是发现了不应该出现的现象。又几经努力，我利用指数函数的连续性给出了这第二式的证明，但这在逻辑上出现了问题，因为在 [3] 中指数函数的连续性是其第四章的定理 11 的内容。为了解决这个问题，我先证明指数函数的第一个公式，然后证明指数函数的连续性，最后证明这第二个公式。再利用这两个公式，证明了对数函数和幂函数的有关公式。这些结果出现在教学研究论文 [5] 中。在 [1] 中我们又进一步改进和完善了 [5] 的工作，给出了指数函数、对数函数和幂函数的一些公式的简洁证明。

2. 一阶恰当微分方程和积分因子是常微分方程的最基本的内容之一。对一般的对称形式的一阶微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

来说，它成为恰当方程的充分必要条件以及它存在只与一个变量有关的积分因子 $\mu(x)$ 或 $\mu(y)$ 的充要条件在很多常微分方程教材中都有阐述。那么，我们在教学中想到这样一个问题：

一般形式的积分因子 $\mu(x, y)$ 什么时候存在呢？这个问题未见有人提出。我们在 [2] 中证明：对可微函数 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 定义域中的任一点 $(x_0, y_0)$，只要 $(P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$，上述微分方程在点 $(x_0, y_0)$ 的某邻域内总存在积分因子 $\mu(x, y)$。

3. 常微分方程基本理论包括三方面的内容，即初值问题解的存在唯一性、解的延拓与解对初值与参数的连续性与可微性。一般教材中对这三方面的定理都有表述和证明。例如，解的存在唯一性定理的证明可分为五步来完成。对解的延拓定理，现有书中分成两种情况来处理，一是在初值问题存在唯一解的假设之下研究饱和解的存在唯一性，例见 [6, 7]。另一是在初值问题存在解的假设之下研究最大、最小饱和解的存在唯一性，例见 [8, 9]。 在 2013 年我们在常微分方程的教学中很偶然地发现，国内不少教材在初值问题存在唯一解的假设之下证明延拓定理时忽视了对饱和解存在性的证明，即在证明之初就直接假设饱

[4] 菲赫金哥尔茨著，叶彦谦等译，微积分学教程（第一卷），人民教育出版社，北京，1960 年。

[5] 韩茂安，关于指数函数、对数函数与幂函数的教学探索，大学数学，30:1（2014），88-92。

[6] 韩茂安，周盛凡，邢业朋，丁玮，常微分方程，高等教育出版社，北京，2011。

[7] 庞特里亚金著，林武忠、倪明康译，常微分方程，高等教育出版社，北京，2006。

[8] 尤秉礼，常微分方程补充教程，人民教育出版社，北京，1982。

[9] 赵爱民，李美丽，韩茂安，微分方程基本理论（重印版），科学出版社，北京，2013。