

书评：《庞加莱猜想——追寻宇宙的形状》

王 涛



庞加莱的大名已经不需要多做介绍，他被誉为最后一位数学通才。除此以外，他还是一位非常重要的物理学家与科学哲学家。由于意识形态的缘故，庞加莱的科学哲学思想在我国一段特殊的时期（1949-1976）多次遭到批判。但与此同时，他的数学思想却在中国得到了快速传播，这其中就包括庞加莱猜想。

1904年，50岁的庞加莱在《位置分析》的第5篇补充论文中提出了这样一个问题：“单连通的三维闭流形是否同胚于三维球面？”值得注意的是，庞加莱本人并没有给出任何肯定或否定的猜测。随着拓扑

学的进一步发展，这个问题的重要性逐渐显现出来，拓扑学家们普遍猜测答案是肯定的。到了20世纪20年代，这个问题已经开始作为一个猜想公开流传，不少数学家直接将其称为庞加莱猜想。

从上世纪30年代开始，数学家竞相投身于庞加莱猜想的证明当中，因在庞加莱猜想的证明方面取得突破而获得菲尔兹奖的数学家有好几位，所用的方法也逐渐从拓扑过渡到几何分析。最终，在哈密顿（R. Hamilton）等人工作的基础上，由俄罗斯数学家佩雷尔曼（G. Perelman）成功封顶。庞加莱猜想的证明是一部波澜壮阔的史书，对这部分内容感兴趣的读者可以去参看欧谢（O'Shea）的《庞加莱猜想：宇宙形状之追寻》¹或刘培杰主编的《从庞加莱到佩雷尔曼》这两本书，前者较为注重思想性，后者内容则更为详尽，篇幅达1000多页。

对于普通大众而言，庞加莱猜想的名字也许一点



¹ O'Shea D, The Poincaré Conjecture: In search of the shape of the universe. Bloomsbury Publishing USA, 2007. 有中译本，孙维昆译，《庞加莱猜想》。长沙：湖南科学技术出版社，2010。为了区分，本文将中译名定为《庞加莱猜想：宇宙形状之追寻》。

也不陌生。特别是在2006年国际数学家大会上，解决庞加莱猜想的佩雷尔曼拒绝领取菲尔兹奖，一时成为重大新闻。就在全世界媒体对此事给予高度关注的同时，日本NHK电视台的一位制作前沿医疗与生命伦理类节目的导演春日真人（Masahito Kasuga），在听取了两位日本数学家对庞加莱猜想的讲解后，深深地被数学家痴迷于数学猜想的执着精神所打动，决定就庞加莱猜想做一期访谈节目。

在长达半年的时间里，春日真人与他的制作组奔波于英、俄、法、美等国家之间，先后采访了多位与庞加莱猜想有关的数学家。《庞加莱猜想——追寻宇宙的形状》（以下简称《庞加莱猜想》）即是NHK制作组关于庞加莱猜想的专题记录。由于《庞加莱猜想》面向的读者主要是社会大众与数学爱好者，因此主要有以下几个特点。

以宇宙的形状为主线

为了吸引读者，《庞加莱猜想》给自己起了一个响亮的副标题“追寻宇宙的形状”，这也是多数讲述庞加莱猜想的科普作品所通用的副标题。比如欧谢的《庞加莱猜想：宇宙形状之追寻》从标题上来看与《庞加莱猜想》几无区别。不同的是，前者只是为了引出拓扑与流形的概念，而后者则以宇宙的形状为主线来讲述庞加莱猜想。

《庞加莱猜想》首先从地球的形状讲起。从上古时代开始，人类就在探索地球的形状。众所周知的是，15世纪麦哲伦环球航行证明了地球表面是一个球面，但这个结论实际上是不充分的。因为如果地球表面是一个环面，那麦哲伦在环行一周后也能回到出发点。那如何确定地球表面就是一个球面呢？数学家给出了一种方法：假设有一根足够长的绳子。在地球上的任意一点，将绳子的一头固定在这个地方，然后绳子的另一头沿任意方向环绕地球一周，回到出发点后将绳子的另一头仍固定在这个地方。这时用力回收绳子，如果绳子能在不离开地球表面的情况下被收回，则说明地球是球形的。

同理，在三维宇宙之中，用火箭将绳子环绕宇宙一圈，如果这个圈能够成功收回来的话，就可以说宇宙是球形的，这就是著名的庞加莱猜想。这个听起来并不算太难理解的猜想，证明起来却是出奇得困难。困扰数学家的问题在于，环绕宇宙的那根绳子可能会打结，复杂地缠绕在一起，形成结扣。如果这个问题不解决，庞加莱猜想就难以证明。

就在数学家被庞加莱猜想所阻的时候，美国数学家斯梅尔（S. Smale）发动了一次逆袭，取得了庞加莱猜想的第一个大的胜利。他先不理睬三维宇宙的情形，而直接让火箭飞向“高维数的宇宙”。表面上看，这个问题更复杂了。但实际上，由于在高维的宇宙中绳子缠绕的问题根本不会发生，问题反而变简单了。举个最简单的例子，在平面上两条不平行的直线必然相交，但在空间中两条不平行的直线却不必相交，这就是维数高的好处。

但是，这种从高维开始依次往下攻克庞加莱猜想的策略，最终也止于四维宇宙，而庞加莱猜想恰恰是对三维宇宙而言的。此前数学家一直考虑绳子打结的问题，却没有考虑绳子如果收不回来，宇宙又会是什么形状？基于这种想法，美国数学家瑟斯顿（W. Thurston）开始直接思考宇宙的分类。1982年，他提出了一个大胆的猜想：无论宇宙的形状如何，都必定可以分解为8种标准的宇宙形状。经过瑟斯顿的整理，人们对宇宙形状的认识大大加深了。

这时数学家认识到几何化猜想是一个更为宏大的命题，庞加莱猜想只不过是其中的一个特例。如果证明了几何化猜想，那么庞加莱猜想自然就得到了解决。为了攻克这个猜想，美国数学家哈密尔顿提出了里奇流方程，给出了一种将不规则的宇宙形状变成瑟斯顿的8种标准形状的方法。我们不妨把不规则的宇宙形状比作气泡，气泡刚从吸管吹出来的时候是凹凸不平、松软多变的形状，但经过某种处理，它可以变成一个非常规整的球面。

然而采用哈密尔顿的里奇流方程让不规则的宇宙形状产生变化，一不小心就会产生坍塌，就好比气泡在变成规整球面之前可能会突然破裂。这在数学上被称为奇点，是数学家非常讨厌的东西。佩雷尔曼则直接面对它，他深入到里奇流奇点附近进行观察，引入了新的数学工具来估计潜在的坍塌，证明了奇点是可以控制的。就好像气泡在破裂之际，我们可以让时间倒流，然后让其免于破裂一样……

数学家并非怪人

为了再现庞加莱猜想证明的百年历程，制作组先后采访了贝纳胡（V. Poénaru）、哈肯（W. Haken）、斯梅尔、瑟斯顿、田刚等数学家。这些数学家全是社会中的正常人，例如证明四维以上庞加莱猜想的斯梅