好书推荐

《什么数是实数？》阅读报告

包亦乔

Michael Henle 所著的《什么数是实数？》一书的前两章分别介绍了实数公理化和实数的构造。该书从最基本的定义入手，逐步推进；概念环环相扣，前后呼应；同时还穿插介绍解决数学问题的方法，如数学归纳法；每一小节以习题结尾，有助于加强读者的理解。

我的这篇文章汇总了原书前两章的主要概念的定义和主要结果。当然，我并没有企图摘录全部定义和定理。可以假定读者已经掌握等价关系，等价类，域，域同构等代数学的基本概念，对它们的定义本文不再转述。希望本文能够帮助读者迅速了解原书前两章的主要框架。

如何建立一个数系

定义 1 有理数

设 Z 为整数集。在 $S = \{ (x, y) \mid x, y$ 属于 Z，y 不等于 $0\}$ 上定义一个等价关系 $\sim$：$(a, b)\sim(c, d)$ 当且仅当 $ad = bc$。称每个等价类为一个有理数，并且记 (a, b) 所在的等价类为 a/b。

定义 2 有理数集上的运算

设 a/b, c/d 为两个有理数，定义 $a/b + c/d = (ad + bc)/(bd)$, 定义 $a/b*c/d = (ac)/(bd)$。

这个定义是完善的（well-defined），就是如果 a/b 与 a'/b' 表示同一个有理数，c/d 与 c'/d' 表示同一个有理数，那么 $a/b + c/d$ 与 $a'/b' + c'/d'$，$a/b*c/d$ 与 $a'/b'*c'/d'$ 的结果表示同一个有理数。

这一节通过等价关系给出有理数的严格定义，这与我们在数学课本上学到的内容是吻合的，不过更为严谨。

序公理

定义 3 称域 S 是有序域，如果存在 S 的子集 S^+，使得：

（a）只要 a 和 b 属于 S^+，那么 $a + b$ 与 a 同样属于 S^+，

（b）只要 a 属于 S，那么以下三个命题有且仅有一个为真：$a = 0$，a 属于 S^+，或 $-a$ 属于 S^+。如果第二种情形成立，称 a 符号为正；如果第三种情形成立，称 a 符号为负。（三分律）

容易证明，有理数集 Q 是一个有序域。

定义 4 称两个有序域 S 和 T 是有序域同构的，如果存在 S 到 T 的域同构 i：$S \to T$，使得任意 a 属于 S^+，都有且 $i(a)$ 属于 T^+。

定义 5 不等关系

设 S 为任意有序域，设 a、b 为 S 中的元素。定义 $a < b$ 如果 $b - a$ 为正，定义 $a \le b$ 如果 $b - a$ 为正，或等于零。

定义 6 绝对值

设 S 为一个有序域，a、b 为 S 的元素。绝对值的定义如下：

$|a| = a$，如果 a 为正或等于零；$|a| = -a$，如果 a 为负。

绝对值 $|a - b|$ 叫做 a 与 b 之间的距离。

完备性公理

定义 7 设 S 为一个有序域。称 S 的子集 G 有上界，如果存在 S 中元素 k 满足对 G 中任意元素 a, $a \le k$，并称 k 为 G 的一个上界。

称 S 中的元素 b 为 G 的上确界，如果 b 是 G 的上界，同时对 G 的任意上界 k，都有 $b \le k$。

定义 8 称一个有序域 S 序完备，如果 S 的任意有上界的非空子集存在上确界。

定义 9 阿基米德性质

称一个有序域 S 是阿基米德的，如果任给两个整数 a、b，存在正整数 n 满足 $b < na$。

定义 10 极限

称一个取值于有序域 S 的数列 $\{x(n)\}$ 的极限为 b（也叫收敛到 b），如果任给 $S+$中元素 k，存在正整数 N，使得

好书推荐

$$|x(n) - b| < k, \text{对于 } n > N.$$

称序列 $\{x(n)\}$ 是一个柯西序列，如果任给 $S+$ 中元素 k，存在正整数 M 满足

$$|x(n) - x(m)| < k, \text{对于 } m, n > M.$$

定义 11 称一个有序域 S 柯西完备，如果 S 中所有的柯西序列在 S 中有极限。

定理 1. 一个有序域序完备，当且仅当它柯西完备且有阿基米德性质。

本书的第一章在定义有理数后，又介绍了域的概念，逐步引入同构、有序、完备性、阿基米德的定义。学习这些概念对于建立严谨思维很有意义。书中每一小节的结尾配有大量习题，有效地帮助读者巩固小结内容。

零序列

定义 12 一个极限为零的序列称为零序列。

定义 13 **序列的等价**

称两个序列 $x = \{x(n)\}$、$y = \{y(n)\}$ 等价，记作 $x \sim y$，如果序列之差 $\{(x(n) - y(n))\}$ 是一个零序列。

定义 14（实数的柯西序列定义）设 S 为所有有理数的柯西序列组成的集合，实数集 R 是 S 在序列等价关系下的等价类组成的集合。

定义 15 任给 x、y 属于 R，设 $\{x(n)\}$ 为一个属于 x 的序列，$\{y(n)\}$ 为一个属于 y 的序列。$x+y$ 定义为 $\{x(n)+y(n)\}$ 所在的等价类，xy 是定义为 $\{x(n)y(n)\}$ 所在的等价类。

定义 16 一个由有理数组成的柯西序列 $\{x(n)\}$ 称为正的，如果存在正整数 M 和 N 满足任意 $n > N$，$x(n) > 1/M$.

如果 x 属于 R，称 x 为正的如果任意一个属于 x 的序列是正的。

定理 2 通过柯西序列构造的实数集 R 是序完备的有序域。

戴德金分割

定义 21 一个戴德金分割（简称为一个分割）是指有理数 Q 的一个子集 x，满足

(a) x 或 x 的补集都不是空集，

(b) 如果 r 在 x 中，$s > r$，那么 s 在 x 中，

(c) x 没有最小的元素。

实数集 R' 被定义为所有分割组成的集合。

定义 17 如果 x、y 是两个分割，那么它们的和 $x+y$ 定义为：

$$x + y = \{r+s | r \in x, s \in y\}.$$

定义 19 称正有理数组成的集合为零分割；称一个分割非负，如果它是零分割的一个子集；称它为正，如果它是零分割的一个真子集。

定义 20 如果 x 和 y 是非负分割，它们的乘积定义为 $xy = \{rs | r \in x, s \in y\}$。如果 x 是一个分割，那么 x、$-x$ 中有且仅有一个非负。我们定义：$|x| = x$ 与 $-x$ 中非负的那个。

对于分割 x、y 我们定义：

$xy = |x||y|$，如果 x、y 都是正的；$xy = |x||y|$，如果 x、y 都是负的；$xy = -|x||y|$，其他情况。

定理 3 所有序完备的有序域与 R 之间存在有序域同构。

推论：通过柯西序列构造的实数集 R 与通过戴德金分割构造的实数集 R' 之间存在有序域同构。

第二章由有理数序列及其性质为基础，给出了实数的两种定义方式：柯西序列定义和戴德金分割和定义域。这部分内容与第一章内容紧密相连，表现出严谨的逻辑性，有助于读者更好地理解实数的概念和性质。

本书由浅入深，不要求太多数学背景知识。开始第一章阅读基本没有障碍，但是内容高度抽象，定理证明有一定难度，因此需要一定的数学成熟性。书中配有大量习题辅助读者理解，但是这本书对于我们高中生而言，难度仍显略大。似乎本书更适合于本科生阅读。

作者简介：

单治超，北京大学学士、博士，带着成为数学家的梦想选择数学专业，但却没能最后实现，有些遗憾。现在北大附中工作，致力培养数学人才。