斯蒂芬问题和自由边界问题

蒋　迅

本文从科普的角度介绍一类特殊的非线性偏微分方程及其应用。我们先从最简单的冰与水的相变引入这个概念，即自由边界问题，然后介绍在这类问题上最重要的人物约瑟夫·斯蒂芬（Joseph Stefan）。最后介绍几个自由边界问题的例子。我们尽量不涉及太深的偏微分方程的知识，希望能引起非数学专业读者的兴趣。

1. 什么是自由边界问题

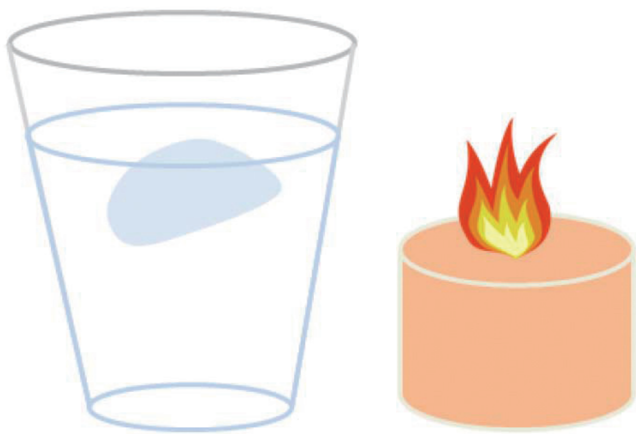

图 1　冰与水的自由边界模型

假设我们有一杯水，那么水的温度将受周围环境温度的影响。在常温环境的条件下，杯中的水温也将稳定在同一个温度上。如果我们在杯子的旁边放一个热源的话，水的温度将开始从距离热源最近的地方开始升温。水的温度变化满足热传导方程。让我们记水的温度函数为 $u(x, y, z, t)$，其中 (x, y, z) 是点坐标，t 是时间。这时候，水杯中水温的热传导方程就是

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \cdot \Delta u(x, y, z, t) \quad (x, y, z) \in \Omega\ ,$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 是温度 u 对时间 t 的偏导数，α 是热扩散率，Δ 是拉普拉斯算子，(x, y, z) 是水杯中的点，水杯中水所占据的空间就是区域 Ω。这些点的集合就是此热传导方程能够得到满足的区域。为了保证方程解的唯一性，我们还需要给出这个区域的边界条件和水温的初始条件。比如说，我们可以假定已知水杯边缘的温度和水在一开始时的温度。

现在我们把问题稍微变化一点。假定我们在水杯里增加一块冰，由于冰和水有不

同的热扩散率 α_S 和 α_L，它们分别在两个区域 Ω_S 和 Ω_L 中得到满足。于是我们就得到了两个热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha_s\cdot\Delta u(x,y,z,t)\quad (x,y,z)\in\Omega_S\,,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha_L\cdot\Delta u(x,y,z,t)\quad (x,y,z)\in\Omega_L\,.$$

其中下标 S 代表固体（solid）冰所占区域，L 代表液体（liquid）水所占区域。在这里，我们仍然假定水杯边缘的温度是已知的。但是我们无法知道冰块的边界在哪里，而且这个边界甚至是动态的。也就是说，我们无法预先知道上述两个方程成立的区域。在求解的过程中，我们不仅要求得温度分布，还要求得冰与水的交接的界面。因此，我们无法像解一般的热传导方程那样来解决这个问题。这样的一类问题就是“自由边界问题”（free boundary problem）的最典型的例子。

这类问题通常是相变 (phase transition) 的过程。相变是指物质在外部参数（如：温度、压力、磁场等等）连续变化之下，从一种相（态）忽然变成另一种相，最普通的是在一定的条件下，冰变成水和水变成蒸气等，也有可能是相反的过程。我们把这样的过程称为相变。

数学上自由边界问题是一类偏微分方程的定解问题，其定解区域的部分边界是待定的，它和定解问题的解彼此相关且必须同时确定。在自由边界上，除了需要给定通常的定解条件以外，还必须增加一个边界条件。显然，所有自由边界问题都是非线性问题。由于自由边界通常是时间的函数，我们也把自由边界问题称为“移动边界问题”。我们将会看到更多的自由边界问题的例子，其中包括不是相变的自由边界问题。

2. 斯蒂芬问题的历史由来

图 2 布拉克(1728-1799), 拉梅(1795-1870), 克拉佩龙(1799-1864)和弗朗茨·诺伊曼(1798-1895) / 维基百科

上述冰与水的温度问题被称为“斯蒂芬问题”（Stefan problem）。固体和液体的相变现象最早是苏格兰医生和化学家约瑟夫·布拉克（Joseph Black）揭秘的。他 1758 年至 1762 年间在苏格兰的格拉斯哥大学（University of Glasgow）工作期间，进行了一系列的实验。他的结果显示，固体 - 液体的相变过程不能只从热的卡路里量上来理解。他因此在 1762 年引入了潜热（latent heat）的概念。这是相变问题的一个关键。法国数学家和物理学家傅立叶（Joseph Fourier）在 1822 年出版了他的著名著作《热的解析理论》（*Théorie analytique de la chaleur*），为热传导提供了物理和数学基础。

图 3 傅立叶（1768-1830）和他的名著《热的解析理论》/Mathouriste

1831 年，法国数学家拉梅（Gabriel Lamé）和物理学家克拉佩龙（Benoît Paul Émile Clapeyron）把潜热现象引入热传导方程 [1]。他们继续了傅立叶的一项研估从地球的熔岩状态开始逐渐冷却至今大约用了多长时间的研究。他们假定地球一开始是处于液态的；由于表面温度突然下降，凝固过程开始。他们的结论是，地壳的厚度与时间的平方根成正比。这与后来斯蒂芬的结论相同。不过，他们没有建立一个数学方程以确定这个比例常数。

德国矿物学家、物理学家和数学家弗朗茨 • 诺伊曼（Franz Ernst Neumann）在 1860 年代早期曾经部分解决了拉梅和克拉佩龙的问题，但是他假定的初始温度高于融点，而且他只是在一个讨论班上讲了他的结果，以后没有拿出来发表，直到 1901 年才被别人提到。现在，人们仍然把“斯蒂芬问题”的经典解称为诺伊曼解。

图 4 斯蒂芬（1835-1893）/ 维基百科

最后解决这个问题的是斯洛文尼亚物理学家斯蒂芬。他把问题转化为两个相（态）的互变问题，终于在 1889 年左右解决了这个问题。这个问题也就从此被赋予了“斯蒂芬问题”的名称。

在继续我们的主题之前，我们先介绍一下斯蒂芬的生平 [2]。

斯蒂芬于 1835 年 3 月 24 日出生在斯洛文尼亚的埃本塞尔附近的小城圣彼得（St Peter），即现在的奥地利克拉根福市（Klagenfurt, Austria）。父母都是斯洛文尼亚人。当他出生时，父母并没有结婚。直到他 11 岁时，父母才正式

[1] 见“G. Lamé, B. P. Clapeyron, Memoire sur la solidification par refroiddissement d'un globe solide, Ann. Chem. Physics, 47, 250–256 (1831)”。

[2] 见“Bolidar Sarler, Stefan's work on solid-liquid phase changes, Engineering Analysis with Boundary Elements 16 (1995) 83-92”和“Jaime Wisniak, Josef Stefan. Radiation, conductivity, diffusion, and other phenomena, Revista CENIC. Ciencias Químicas, vol. 37, núm. 3 , 2006 , pp. 188-195”。

图 5 斯蒂芬出生地 / 维基百科

结婚。这是一个不富裕但和谐温暖的家庭。他的父亲是一个研磨手，母亲是一位侍女。在上小学的时候，斯蒂芬就显露出才华。老师们建议他继续学业，他在 1845 年进入了克拉根福初中（Klagenfurt gymnasium）。在 13 岁的时候，他经历了“1848 年革命”。这激发了他内心深处对斯洛文尼亚文学的共鸣。

图 6 维也纳大学主楼

在以高分从高中毕业后，他一度考虑过投身本笃隐修会（Benedictine order），但是他对物理的兴趣还是占了上风。于是他在 1853 年去维也纳学习数学和物理。在上学期间他还以实名和笔名用斯洛文尼亚文发表了不少诗。很多现代数学家不知道他在斯洛文尼亚文上的韵律学和歌词上的造诣。1857 年，大四的他通过了教师资格考试，并开始给药理系的学生讲授物理学。他还自觉地开始做研究工作，然后把自己的论文寄给了科学院。他的论文引起了学者的注意，于是他被允许参加了生理研究所科学家们的实验。在那里他开始接触了水流的问题。1858 年，他通过了维也纳大学学位考试，并被授予了博士学位，还获得了正式的讲师资格。但他一开始并没有能得到一个正式的教职。前面帮助过他的两位生理研究所学者又推选他成为皇家科学院的通讯会员（corresponding member），但这也没能有多少帮助。两位学者再次出手帮助。他们找

到了教育部的一位官员，邀请他听一次斯蒂芬的课。这位官员对斯蒂芬的课大为赞赏。1863 年有了一个数学物理学正教授的职位，他就顺利地得到了维也纳大学物理学教授的头衔。那年他 28 岁，是奥匈帝国最年轻的正教授。后来一位年长的教授去世，另一位因病提前退休，这使得他有机会在 1866 年起坐上了物理所主任的职位，那时他仅 30 岁。后来他还担任过维也纳科学院的副主席和欧洲多个学院的院士。

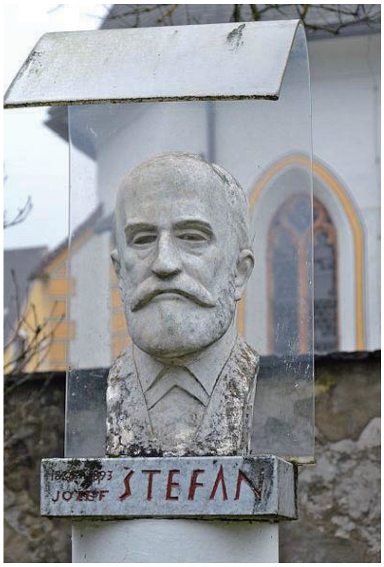

图 7 斯蒂芬的头像雕塑 / 维基百科

斯蒂芬一共发表了八十多篇学术论文，绝大多数都是在《维也纳科学院通讯》上。他最出名的成就是在 1879 年首先提出了斯蒂芬幂定律（Stevens' power law）。这个定律被他的学生路德维希 • 玻尔兹曼（Ludwig Boltzmann）推广，就是现在的斯蒂芬 - 玻尔兹曼定律（Stefan-Boltzmann law）。在此基础上，斯蒂芬推算出太阳表面的温度为 5430℃。这是历史上对太阳表面温度的第一个较精确的测量结果。除此之外，斯蒂芬还第一个提出了气体的热传导测量，研究了蒸汽与流体的扩散和热传导。他在光学上的论文被评为“在过去三年中奥地利公民最佳科学论文”并因此获得了 1865 年奥地利科学院授予的的“黎本奖”（Lieben Prize），在研究电磁方程时，他定义了向量的符号。他还涉足热动力学理论。他计算过线圈的感应率，纠正过麦克斯韦（James Clerk

图 8 奥地利和斯洛文尼亚发行的斯蒂芬纪念邮票

Maxwell）的一个错误，研究过集肤效应（Skin effect）等等。

斯蒂芬是一名优秀的教师，每次讲课前都会认真备课。他不喜欢参加社交活动，不喜欢旅游，甚至不参加当时在欧洲已经流行的学术会议。他就生活在实验室里。但另一方面，他性格开朗，喜欢唱歌，参加合唱团，还成了组织者。1891 年，在他去世的两年前，斯蒂芬与一位寡妇结婚。1892 年，在一次访问朋友的途中他意外中风。1893 年，斯蒂芬在维也纳去世，终年 58 岁。

3. 斯蒂芬的工作

在介绍他的工作之前，我们先来说说在这类问题中扮演了极为重要角色的潜热。我们以冰为例。物理实验表明，当冰的温度上升到零摄氏度时，温度不会立即上升，而是有一个积蓄能量的过程，直到增加了 h 单位的能量 (潜热) 后温度才会继续增长，同时冰转化成水。

斯蒂芬在固体 - 液体相变方面的研究主要体现在从 1889 年到 1891 年这段时期的几篇论文里：

1. J. Stefan, Über die theorie der eisbildung, insbesondere über die eisbildung im polarmeere. Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw., 98(2A):965– 983, 1889.
2. J. Stefan, Über die verdampfung und die auflösung als vorgänge der diffusion. Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw., 98(2A):1418–1442, 1889.
3. J. Stefan, Über einige Probleme der Theorie der Warmeleitung, S.-B Wien Akad. Mat. Natur, 98, 473–484, (1889).
4. J. Stefan, Über die theorie der eisbildung. Monatshefte für Mathematik undPhysik, 1(1):1–6, 1890.
5. J. Stefan, Über die verdampfung und die auflösung als vorgänge der diffusion. Annalen der Physik und Chemie, 277(12):725–747, 1890.
6. J. Stefan, Über die theorie der eisbildung, insbesondere über die eisbildung impolarmeere. Annalen der Physik und Chemie, 278(2):269–286, 1891.

事实上，斯蒂芬考察的是我们现在所称的“斯蒂芬问题”的几个特殊的情况。我们在这里只能简单地介绍一下他的工作。更详细的讨论可以在斯洛文尼亚学者 Bolidar Sarler 写的评论 [3] 中找到。

图 9 一维单相斯蒂芬问题

[3] 见“Bolidar Sarler, Stefan's work on solid-liquid phase changes, Engineering Analysis with Boundary Elements 16(1995) 83-92”。还有“Francesc Font Martinez, Beyond the classical Stefan problem, Ph.D. Thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, 2014”。

斯蒂芬首先考虑的是一维半空间 (x_0, ∞) 上的均匀物质（见图 9），它可以是液态，也可以是固态。在初始时（t_0 时刻），此物质处于固态，温度为融点温度 T_{0S}。当时间 $t > t_0$ 时，在 x_0 处加热并保持一个大于融点的温度 T_Γ。于是此固体在靠近点 x_0 的邻域里融化成液态。新的液态和固态的边界为 $x_M(t)$。他要考虑的是液态区间 $(x_0, x_M(t))$ 的长度。这个问题是拉梅和克拉佩龙所考虑的问题中的融化部分。斯蒂芬用了与拉梅和克拉佩龙相同的假设条件，但他得到了更为完全的解。他得到的是

$$x_M(t) = x_0 + 2C(t - t_0)^{1/2},$$

其中常数 C 是超越方程

$$\rho hC = -k_L \frac{T_{0S} - T_\Gamma}{erf(C\alpha_L^{-1/2})}\pi^{-1/2}\exp(-C^2\alpha_L^{-1})\alpha_L^{-1/2}$$

的解。ρ 是密度，h 是此物质的潜能，α_L 是液体的导热系数。这个问题现在被称为“单相问题”，因为热传导只在一个相里发生。在这个超越方程里，我们看到了潜能的作用。

斯蒂芬考虑的第二个情形是一维全空间 $(-\infty, \infty)$ 上某个物质：在初始时（t_0 时刻），此物质在 $(-\infty, x_0)$ 上是液态且有一个融点之上的均匀温度，在 (x_0, ∞) 上是固态且有一个融点之下的均匀温度。所以热传导同时在两个相里发生。于是他要解决的问题是，当时间 $t > t_0$ 时，新的液态和固态的边界 $x_M(t)$ 的位置。他发现 $x_M(t)$ 的行为与第一类问题相同，只是其中的常数 C 满足一个不同的超越方程。

图 10 阿拉斯加沿岸的海冰 / 维基百科

通过他的一个同事，斯蒂芬听说英国和德国探险家已经把极地冰层厚度作为冰的温度的函数做了测量。这个消息让他眼睛一亮，因为这些数据可以帮助他做理论上的分析。他第三个考虑的问题是估算极地冰的导热性。他用这些数据拟合了他的经验公式，并近似地得到了极地冰的平均热传导为 1.756 瓦 /(米 • 开尔文)。现在这个数是 2.240 瓦 /（米 • 开尔文）。

斯蒂芬考虑的第四个情形与第一个情形类似：他考虑的也是一维半空间 (x_0, ∞) 上的均匀物质，可以是液态，也可以是固态。不同的是，在初始时（t_0 时刻），此物质