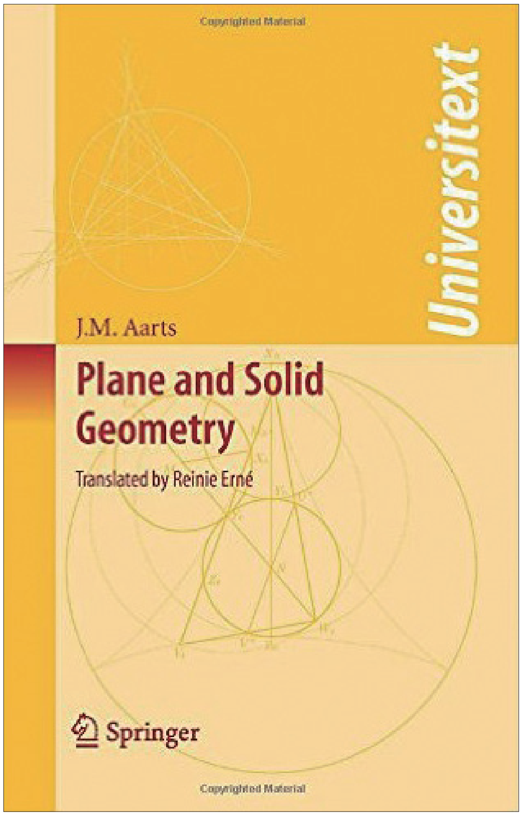
《平面与立体几何》书评

单治超



Plane and solid geometry 封面

我向国内广大高校教师、中学教师、研究生、本科生，以及学有余力的中学生、广大数学爱好者热忱推介阿茨所著 *Plane and solid geometry*。此书目前似乎还没有中译本。

作者阿茨（J. M. Arts）是荷兰人，在代尔夫特理工大学（ Delft University of Technology）任教。他的这本书被同样是荷兰人的埃内（Reinie Erné）翻译成英文，并于 2008 年由施普林格出版社（Springer）出版。

阿茨的这本著作在诸多几何书中很有特色，所以我愿意向大家介绍这本书。

作者在本书的第一章开头明确指出，自己所著的这本几何书，其风格与欧几里得的《几何原本》和希尔伯特的公理化体系都有差异。原文中说：For this book I have adopted a middle course between a synthetic and analytic approach。也就是说，此书既没有像传统几何那样依赖直观而不够形式化，也没有走解析几何的纯计算路线。阿茨的证明是高度形式化的。但另一方面，其推导并非大量依赖于计算。作者是把几何直观用严谨的形式化语言表现了出来，在笔者看来，其工作的意义有些像实数的戴德金分划定义。

本书的前四章介绍平面几何，最后一章捎带提了立体几何。

作者首先承认集合论的全部语言和公理，承认实数集具备的全部性质。然后他设二维平面及其上的直线和角满足六个基本假设，并由这六个基本假设出发推出书中全部结果（不包括第五章立体几何）。

这六个基本假设是：

基本假设 1

二维平面 V 是至少有两个点的距离空间。

二维平面 V 内的元素叫做**点**。对于任意两个不同的点 A, B, 定义**线段**

$$[AB] = \{X \in V : d(A, X) + d(B, X) = d(A, B)\}.$$

定义**直线**

$$AB = \{X \in V : X \in [AB] \text{ 或 } B \in [AX] \text{ 或 } A \in [BX]\}.$$

基本假设 2

二维平面 V 内任意一条直线能与实数集 $\boldsymbol{R}$ 建立等距同构。

基本假设 3

二维平面 V 内存在三个点不在同一条直线上。

称**两条直线 m, n 互相平行**，如果 $m = n$, 或者 m 与 n 的交集为空集。称不平行的直线为**相交直线**。根据直线的定义，两点确定一条直线，因此两条相交直线有且仅有一个交点。

基本假设 4

二维平面 V 内任取一点 P 和一条直线 m，都存在唯一的过 P 点且与 m 平行的直线。

称**两条相交直线 l, m 互相垂直**，如果它们的交点是 C，且任取 l 上点 A 和 m 上点 B，都有

$$d(A, C)^2 + d(B, C)^2 = d(A, B)^2.$$

基本假设 5

二维平面 V 内任取一点 P 和一条直线 m，都存在唯一的过 P 点且与 m 垂直的直线。

本书对于角的概念也给出了严谨的定义。任给二维平面 V 内一条直线 l，可以证明 V 与这条直线的差集一定有两个连通分支，称它们为 **l 截出的两个开半平面**。每个开半平面并上直线 l 叫做 **l 截出的一个闭半平面**。任给两条相交直线 l, m，它们定义了 4 个角，每个**角**是 l 截出的一个闭平面与 m 截出的一个闭平面的交集，并称这 **4 个角的顶点**都是 l 与 m 的交点。如果一个角的顶点是 P，而且角内的两个点 A, B 分别属于 l 和 m 且与 P 不重合，习惯上就可以把这个角记作 $\angle APB$。

任给二维平面 V 内一个点 P 和一个正实数 r，定义**以 P 为圆心，r 为半径的圆**为到 P 的距离等于 r 的点的全体构成的集合。

称**两个角 P, Q 全等**，如果存在从 P 到 Q 的等距满射。

第六个基本假设是关于角的基本假设：

基本假设 6

设角 P 的顶点是 P，(P, r) 是以 P 为圆心，r 为半径的圆。我们要求对任意正实数 r，角 P 与圆 (P, r) 的交集是一条曲线，其长度除以 r 是个定值，这个定值叫做角 P 的弧度 [1]。我们还要求以下假设成立：

1. 任意角的弧度在开区间 $(0, \pi)$ 内；

2. 全等的角的弧度必然相等；

3. 任意属于开区间 $(0, \angle APB$ 的弧度$)$ 内的实数 c，一定存在 $\angle APB$ 内的点 Q，使得 $\angle APQ$ 的弧度是 c；

4. 如果点 Q 在角 $\angle APB$ 内，那么 $\angle APB$ 的弧度等于 $\angle APQ$ 的弧度与 $\angle QPB$ 的弧度之和。

[1] 值得说明的是曲线长度的定义。这里曲线长度就采用一般距离空间中曲线长度的定义，参考 https://en.wikipedia.org/wiki/Curve

作者由这六个基本假设出发构建整本书的公理体系。当然，阿茨也指出，我们熟悉的二维向量空间及其上定义的直线和角（具体定义见书中第 1.5，1.6 两节），事实上是满足这六个基本假设的。因此满足六个基本假设的距离空间及其上的直线、角具有存在性。而且阿茨还在第 24 页的定理 1.27 证明：任意满足六个基本假设的二维平面，其中任取一点 P 和过该点的两条垂直直线，一定存在从该二维平面到二维向量空间的等距同构，使得 P 映到原点，两条垂直直线分别映到 x 轴和 y 轴。但是阿茨这本书并没有从二维向量空间出发，而是从六个基本假设出发构建公理体系。这种处理方式突出了六个基本假设的重要地位，没有让几何流于计算。这六个基本假设是直观的，因此从这六个基本假设出发所进行的论证也一定高度直观。另一方面，整本书又严格地依赖于集合论公理和实数公理体系。

这本书对于三角形全等、反射、平移、旋转、伸缩、相似、对称性、圆幂定理、三角函数、极坐标、圆锥曲线等概念或定理都在上述公理化体系基础上给出了严谨的定义和严格的证明。

基于以上原因，我认为阿茨的这本书可读性很强，有助于读者加深对几何的理解，因此热忱推介这本书给读者。

作者简介：

单治超，北京大学学士、博士，带着成为数学家的梦想选择数学专业，但却没能最后实现，有些遗憾。现在北大附中工作，致力培养数学人才。