现代折纸与数学

蒋 迅　　王淑红

折纸是一种艺术，也是一种技术，不仅可以供人玩乐和欣赏，还可以启迪心智，培养动手能力。现代折纸拥有更强大的技术，蕴藏的数学思想超乎了一般人的想象，已经衍生出折纸数学这样一门学科，广泛地应用在生活以及医学、航空航天等高科技领域。它在带给人们感官享受的同时，也带给人们思维挑战的喜悦。《数学文化》曾刊登了木遥的精彩文章“关于折纸的若干事”[1]，我们进一步通过一系列具有代表性的人物和事例来浅谈现代折纸中的数学。

1 我们日常的折纸

在现实生活中，我们大概都对折纸并不陌生。把一张纸折成千纸鹤、小飞机、小船、小衣服，也许是很多孩子童年最美好的记忆。让我们先来看一看如何折出一个天鹅。

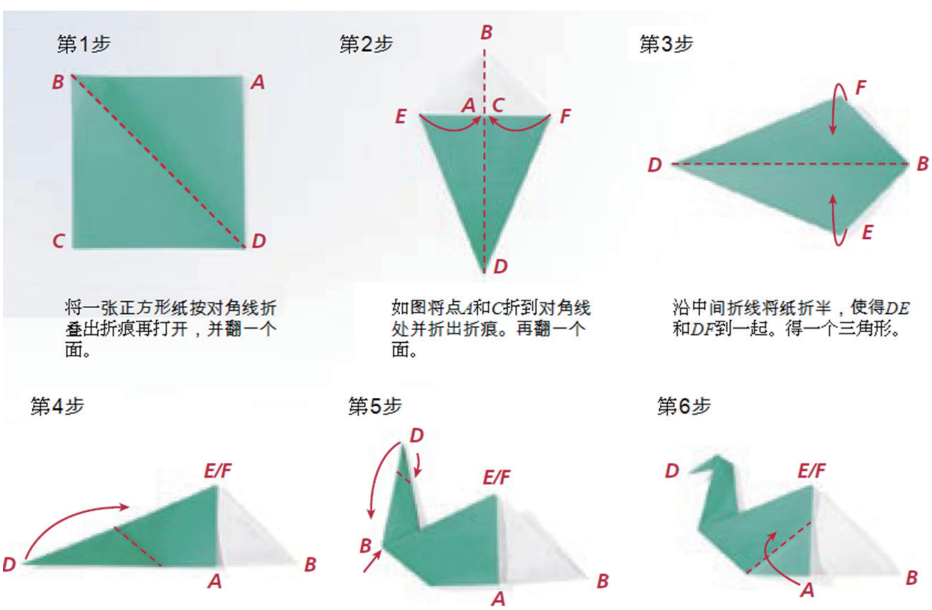

图 1. 天鹅折纸过程

[1] 木遥，关于折纸的若干事，数学文化，2011, 2（4）：34-36.

现在把这个纸天鹅打开，我们得到下面的折痕。用我们平时学过的平面几何的知识，我们可以给出许多题目来，比如，可以计算 AF 的长度，也可以证明 ΔEDB 与 ΔFDB 全等。这些都是再普通不过的几何问题。

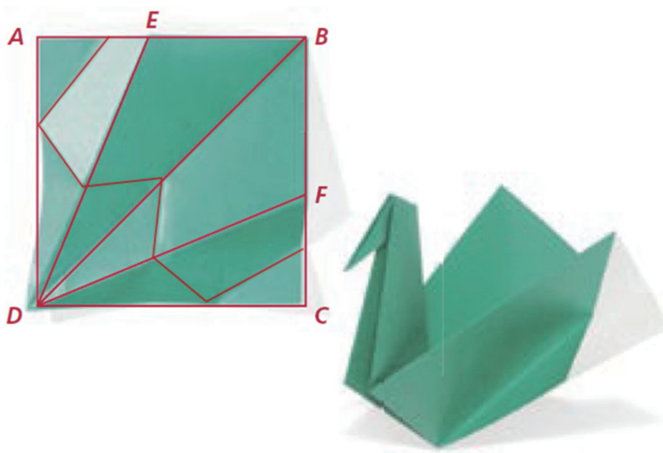

图 2. 纸天鹅

2 折叠的上限

现在，给大家提一个似乎有些“离题”的问题，用一张纸对折，请问最多能折叠多少次呢？其实不少人都产生过这样的疑问。在折叠上面的天鹅时，我们也感到了折叠次数越多就越不容易。有人说 7 次，有人说 8 次。对于大多数的人来说，将一张纸折叠 7、8 次并不困难吧。那么，最终的答案是什么呢？可能大家并没有去深究过。从操作层面来讲，这是一个困难的问题。因为每次对折之后，纸的厚度会增加一倍，面积却缩小一半，而指数级的增长是非常大的，所以至今人们做出的最多的折叠次数是 12 次，还无人真正打破这项纪录，很多人也曾一度认为这是不可能完成的超难任务。

这项纪录的保持者是加利文（Britney Gallivan, 1985-）[2]。她在打破这项纪录的时候还是一个名不见经传的美国高中生。有一次，她的几何老师在班上正式提出了这个问题。如果谁能选择一张合适的纸，将它成功折叠 12 次，就可以获得额外的数学学分。在此激励下，加利文开始不断地尝试，可惜在正常纸中的实验都无功而返。怎么办呢？她没有放弃，想到了金箔。金箔非常薄，只有一米的百分之 0.28 那么厚。这一次，没有令她失望，在尺子、油漆刷和小镊子的协助下，她成功地将 10 厘米见方的金箔折叠了 12 次。但是，老师坚持不能用金箔代替纸张，因为金箔太简单了。

本以为大功告成的加利文并未气馁，继续潜心研究选择什么样的纸以及运用什么样的技巧，来完成这个挑战。最终，数学帮助了她。她尝试了两种数学方法来解决这个问题。

第 1 种方法是，对一张边长为 W、厚度为 t 的正方形纸，在不断交替变换折纸方向的情形下，得到了一个折叠 n 次的边长的近似值：

$$W = \pi t 2^{3(n-1)/2},$$

其中 W 和 t 的单位相同。

第 2 种方法是，对于一张可以很长的纸，将纸按一个方向折叠，亦即折叠一张长且窄的纸，得到了一个关于折叠次数（n）、纸张的最小可能长度（L）和纸张厚度（t）

[2] Britney's Folding Record Still Holds, http://pomonahistorical.org/12times.htm.

之间关系的方程：

$$L=\frac{\pi\cdot t}{6}(2^n+4)(2^n-1)$$

其中 L 与 t 的单位相同。

她制定了严格的规则：一张纸折叠 n 次后，必须要验证 2^n 层排列在一条直线上，这样才令人信服。因为两端弯曲部分未达到 2^n 层，不符合这个标准，所以不算在 n 次折叠的部分中。

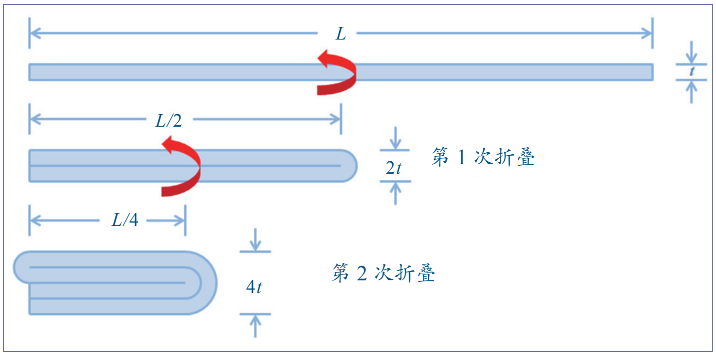

图 3. 加利文折叠 2 次效果示意图

有了折纸的数学理论依据，接下来，就要看哪种方法更可行。她经过缜密思考，发现第 2 种方法更为可行，而且对于高次数的折叠来说需要的纸较少。这就要计算出，折叠 12 次所需要的纸张的长度和厚度。经过计算得到，若将一张纸折叠 12 次，需要 1200 米长的纸才行。如此长的纸去哪里找呢？世上无难事，只怕有心人啊！她想到了卫生纸。

于是，精彩的一幕上演了。2002 年 1 月，在母亲的陪同下，她满怀信心地走进位于波莫纳（Pomona）的一座大型购物中心，镇定自若地铺开那卷庞大的卫生纸，开始折叠之旅。由于纸很长，所以第 1 次折叠花了很多时间，然后按顺序完成一次次折叠。大家能够想象她共用时多久完成折叠的吗？足足耗时 7 个小时，才完成第 11 次折叠，将她的纸成功折叠成了一个 80 厘米长、40 厘米高的硬硬的厚板。

现在距离成功仅一步之遥了。她面露笑容地完成了第 12 次折叠。这是打破纪录的一刻，这是见证历史的瞬间，怎能不让人激动呢？难怪她在自己的小册子《怎样将一张纸折叠 12 次：一个不可能完成的挑战的解决方法》（*How to Fold Paper in Half Twelve Times: An 'Impossible Challenge' Solved and Explained*）[3] 中写道：“当我完成第 12 次折叠时，世界是那么美丽。”她的笑容那么灿烂，一如所有的坚持和信念在这一刻光荣绽放出的一朵美丽的花。

图 4. 加利文成功了（来源：维基百科）

此后，她受到了更多的关注。2005 年，哥伦比亚广播公司在黄金时段的数字追凶节目播出了她的成功。2006 年 9 月 22 日，她有机会在国家数学教师委员会（National Council of Teachers of Mathematics） 会议上演讲。2007 年，她从加利福尼亚大学伯克利分校（University of California–Berkeley）的自然资源学院毕业，获得环境科学学位。

[3] Britney Gallivan, How to Fold Paper in Half Twelve Times: An 'Impossible Challenge' Solved and Explained, Historical Society of Pomona Valley, 2002.

加利文的成功也激起了更多的人跃跃欲试。虽然这些勇于尝试的人收获了一些赞美，但他们要么把纸进行捆扎、要么将纸撕裂、要么将纸进行粘连，没有完全遵守折叠的游戏规则，所以算不上真正意义上的挑战成功。不过，极限在哪里还是一个未知数。2011 年，美国麻州圣马克中学的师生们借用麻省理工学院的的无尽走廊（Infinite Corridor），在尝试了 6 年之后终于成功地折叠了 13 次，可惜因没有符合长度的一卷卫生纸，他们只能把很多卷卫生纸进行粘连来达到所需要的纸的长度 [4]。

这算不算是破了加利文的记录呢？看加利文怎么说吧。加利文对他们的热情和坚韧给予了赞美，但却不认为他们挑战成功，因为不剪不粘是折纸艺术的最基本要求。后来他们自己也承认了这一点，但却认为，虽然如此，也在某种意义上打破了加利文所创造的折纸纪录。仔细想想，我们可以把能够折叠多少次看作一个求最大值的问题，而这类问题都必须明确一个求值的范围。似乎加利文并没有把这个范围说得很明确，所以才会产生一些不同的意见。不管谁是谁非，大家如果有兴趣可以用家里的卫生纸小试一下哦！亲自体会一下它与普通 A4 纸或报纸折叠效果的异同。

也许有人说，我用世界上最薄的纸就应该能想折叠多少次就折叠多少次。这是不可能的。在加利文折叠 2 次效果示意图（图 3）中，我们有意夸大了纸的厚度，使读者可以看清楚我们的折叠过程。假定纸的厚度为 t，长度为 L，那么在经过一次折叠之后，厚度就成了 $2t$，长度成了 $L/2$。经过两次折叠之后，厚度成了 2^2t，长度成了 $L/2^2$。经过 N 次折叠后，厚度成了 2^Nt，长度成了 $L/2^N$。就是说每折叠一次，厚度增加一倍，长度减少一半。我们可以看到，厚度与长度的比 R 满足：

$$R=\frac{2^N t}{\frac{L}{2^N}}=2^{2N}\frac{t}{L}.$$

容易看出，这个比值随着 N 的增加而成指数增长。普通的纸张（11" ×8.5"）的厚度大约为 10^{-4} 米＝ 0.1 毫米，长度大约为 11 英寸＝ 279 毫米。美国物理学教授阿兰（Rhett Allain）[5] 计算了这个比值 R 并得到图 5。

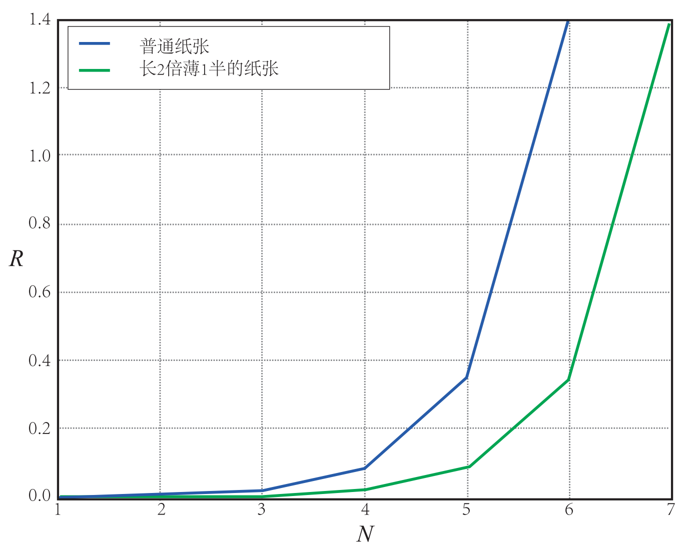

图 5. N 与 R 的关系 /（来源：阿兰）

可以看到，对于普通纸张，N ＝ 4 时，R 大约是 0.086；N 大于 5 后，R 就超过了 1，也就是说，这时的厚度超过了长度。在实际操作中这样的情况显然是无法操作的。即使

[4] 'Brad Petrishen, Southborough Students' Paper-folding Feat Change, Daily News, 2011 年 12 月 12 日 .

[5] Rhett Allain, Folding Paper With Computational Tools, Wired Science Blogs, 2012 年 8 月 10 日 .

长度增加一倍厚度减少一半时，再多折叠一次后 R 也超过了 1。

现在我们来用一个特别长的普通纸张来折叠 50 次，并假定这时 R 到了 1。让我们来看看长度需要有多长。我们有

$$L=(2^{2N})\frac{t}{R}=(2^{100})\frac{10^{-4}}{1}=1.27\times 10^{26}m.$$

这个长度已经超过了从地球到太阳的距离（1.5×10^{11}）。

从这个故事，我们多少可以看到美国人的教育方式。老师不局限于课堂上的内容，而是提出一些没有现成答案的问题来。加利文把握住了机会，于是得到了一个漂亮的解答。其实机会是均等的，只是看谁能够抓住。

加利文的成功除了她的坚持和信念之外，当然和数学分不开。折纸起源于中国，但是折纸在日本才得到本质性的发展，直至 20 世纪 80 年代，人们才真正注意到折纸是值得研究的数学问题。折纸数学近来甚至发展成为了一个专门的数学学科，存在着很多有意义的问题。如果我们展开折纸作品，上面的折痕会表现出一些数学特性，使我们有规律可循，从而更轻易地实现折叠。所以这就不难理解为什么是加利文的数学老师给她提出这个问题，为什么加利文能够想到将折叠问题转化为数学方程。

3 三浦折叠

让我们再来看看加利文的折纸方法还能对我们有什么启发。我们可以看出，她的方法是地图折叠的一种特殊情形。因为她做的是单方向（包括反方向）折叠，所以她一定要让纸张足够长。但细想一下，我们有什么理由一定要限制自己在一个方向上折叠呢？纵观折纸的历史，五彩缤纷的折纸作品（比如我们的天鹅）都没有局限于单方向折叠。最为平庸的折纸算是袖珍地图了。如果读者买过袖珍交通图的话，那么一定会发现它至少在横向和纵向两个方向上折叠。那么问题出来了：有没有更好的方法把地图折叠得更小更紧凑？

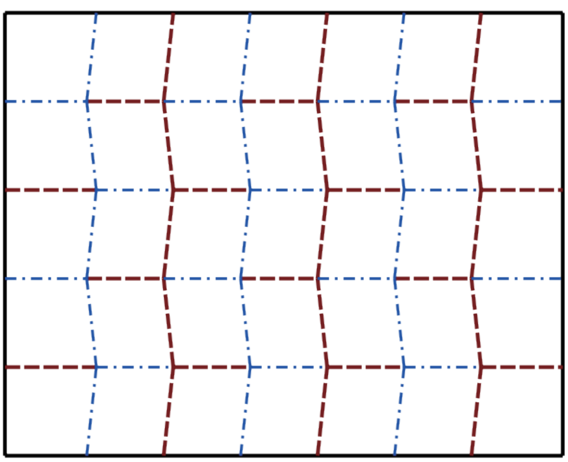

图 6. 三浦折叠的折痕（来源：维基百科）

事实上，这样的方法确实存在，其中之一就是三浦折叠（Miura fold）。三浦公亮（Koryo Miura, 1930-）是日本东京大学天体物理学家。他平时的研究涉及到将大的平

板（如天线和太阳能板）进行最有效的装箱问题。通常的做法是像地图那样横竖折叠。他注意到这种方法有 3 个缺点：第一，一个正交折叠地图需要一系列过度复杂的动作来折叠和展开它；第二，一旦展开后折痕很有可能不稳定；第三，直角折叠几乎无一例外地在纸张上诱导出很大的压力，在两个相交的折痕处首先出现撕裂。

他决心自己发明出一个更好的方法。他的方法就是用日本的传统折纸术。其中最常见的是，使用一种变型的手风琴折叠，以产生由一系列全等平行四边形组成的略微呈脊状的表面。他从几何形状和弹性方面研究发现，这种手风琴式的折叠与传统的正交折叠的最大区别在于其折叠的相互依赖性。因此，沿着一条折痕的拉动也同时产生了沿其他折痕的运动。换句话说，用户可以只需拉动一个角，就可以打开整个结构。如图 6，他把两个相互正交的折痕（即 90 度）改为一个 84 度和一个 96 度折痕的平行四边形，每行换一个方向。这个方法就是以拉开对角两端来把纸展开，而在收缩时则反向推入，除了可以节省空间外，还可避免在折叠和展开的过程中造成损耗。研究发现这个方法可使物件的体积减少 25 倍，并使能量密度加强 14 倍，不仅可以用在地图上，还可用于人造卫星的太阳能板收放等方面，因而 2006 年被日本经济产业省评为百大日本发明之一。

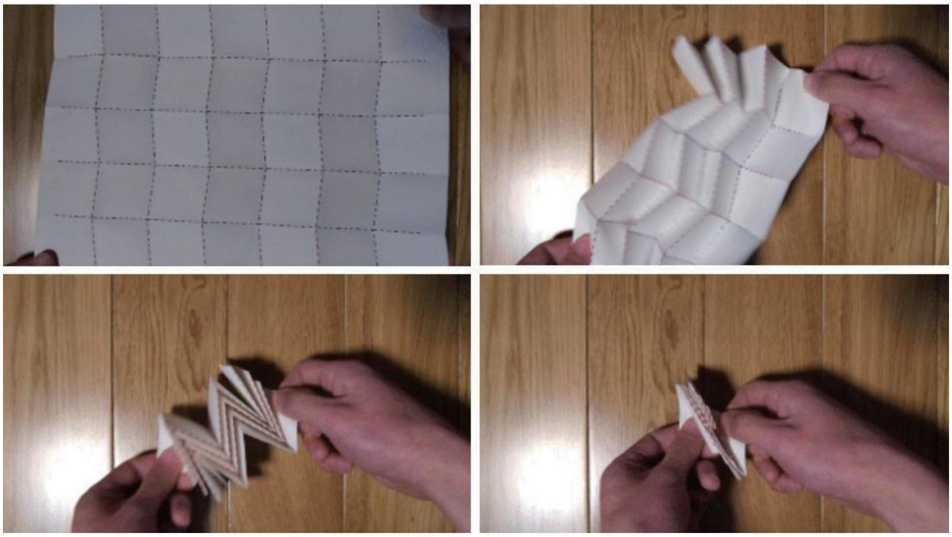

图 7. 三浦折叠（来源：维基百科）

4 罗伯特·朗的折纸

折纸在日本的成功也影响到了大洋彼岸的美国。美国物理学家罗伯特·朗（Robert J. Lang, 1961-）开始把折纸作为数学理论进行研究。他本科毕业于加州理工学院电子工程系，继而获得斯坦福大学电子工程硕士和加州理工学院的应用物理博士学位[6,7]。

朗博士对折纸的兴趣来自他的小学老师。因为只有 6 岁的他在班里过于超前，老师只好给他找一些有意思的事情做，从此一发不可收拾。那个时候折纸在美国还没有流行起来，没有折纸俱乐部，也没有折纸年会。朗有幸找到了折纸大师伊莱亚斯（Neal Elias）的地址，两个人开始通过信件交流起来，他的折纸水平也显著提高。到 13-14 岁时，他就已经能自己创作。

在大学里，他选择了电子工程专业，因为他喜欢动手制作。有一次他被一个实验课上的激光实验所吸引，他爱上了光学。同时，他继续把折纸作为一个业余爱好。他

[6] 罗伯特·朗个人网站，http://www.langorigami.com.

[7] Evan Ackerman, Robots Get Flexible and Torqued Up With Origami Wheels，IEEE Spectrum, 2014 年 6 月 16 日 .

接触到了许多折纸大师，折纸水平更上一层楼。由于在大学里受到了更多的数学训练，他开始自觉地把折纸与数学联系起来。他注意到，不管是物理还是工程学，一个重要的手段就是建立数学模型，然后用数学作为工具去研究这个模型，从而对所对应的对象有所了解。折纸也是这样，不管有多么千变万化，都有其内在的自然规律。符合规律的就可以做到，反之就无法实现。他想，他如果能够找出这些规律来，那么就可以按照一定的规律去创作。

在斯坦福大学攻读电子工程硕士期间，他每周在 IBM 兼职工作一天半，同时开始为他的第一本折纸书准备材料[8]。他的书名叫“折纸大全”（*Complete Book of Origami*）。现在想起来觉得有些好笑，因为它收集的折纸图案与大全相差甚远。从斯坦福毕业后，他又回到加州理工攻读博士学位。然后到德国去做博士后。在德国期间，他住在著名的黑森林（Black Forest）附近。大自然的启迪激发了他的创作灵感。他创作出了很复杂的德国布谷鸟钟（cuckoo clock）：上面是一个带有角的鹿头，一只小鸟落在打开的窗台上，钟面上有时针和分针，下面还有一个钟摆。他选了一张 10 英尺长 1 英尺宽的纸，用了 3 个月时间设计和 6 小时折叠。这个作品让他一举成名。他对折纸有了更深刻的理解，于是开始思考写一本新书，一本关于折纸方法的书。

图 8. 罗伯特•朗制作的布谷鸟钟（来源：朗的折纸网站，http://www.langorigami.com/）

以后的 14 年里，他继续做雷达物理学家，在自己的专业领域里取得了成功。先是到 NASA 的喷气推进实验室工作，后来又到硅谷的几家公司工作，主要做的都是半导体激光器、光学和集成光电子学方面的工作，并获得 46 项专利。他的写作计划只能在很少的空余时间里去实施。他感觉无法再这样继续下去了。要么放弃写作，要么放弃工作。2001 年，他下决心辞去了工作，全身心投入到写

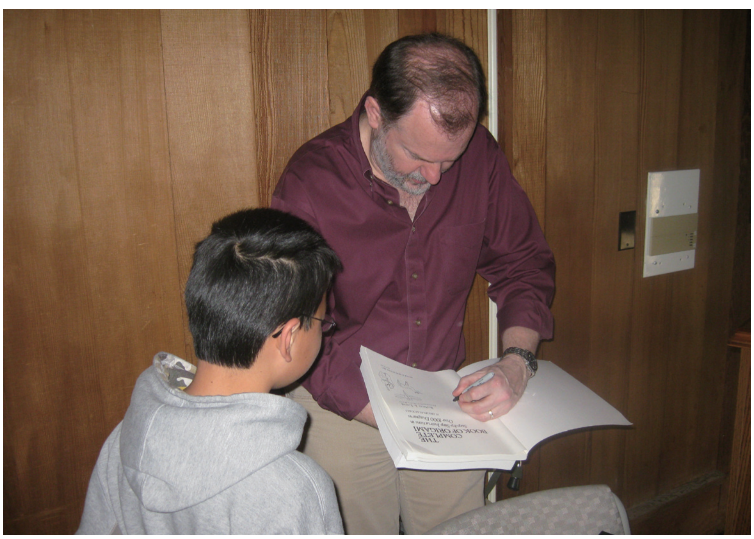

图 9. 朗博士（原来他还是一个左撇子哦！）为小折纸爱好者签名

[8] The Mind-Bending Artistry of Robert Lang，斯坦福大学校友会杂志，2011 年 5/6 月刊 .