彩虹背后的数学

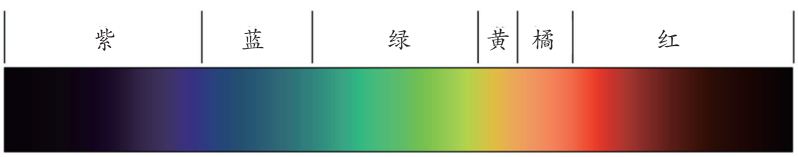
Marianne Freiberger / 文　丁 玖 / 译

当伟大的数学家艾萨克·牛顿解释彩虹的颜色与折射时，诗人约翰·济慈吓坏了。济慈抱怨（当然通过诗），数学解释以冰冷的规则和线条，毁灭了这些魔幻般的自然奇观。但是，正如我们下面将看到的，数学解释只需要基本的几何线条和圆圈，漂亮的数学原理和彩虹本身是一样的优雅。

因折射而弯曲

彩虹的颜色是因光折射而分裂成的一个结果，就像光线通过棱镜照射时所发生的那样。从太阳上来的白光是不同频率电磁波的组合。当这些频率的组合在同一时间到达你的眼睛时，你就能看到白色，当你的眼睛捕捉到其它的波时，你就会感知另一个特定的颜色。

约 670 至 780 太赫频率之间的光波被视为紫罗兰色调，光谱的另一端频率在约 400 至 480 太赫之间，它给出了不同深浅的红色知觉。而所有其它颜色均来自这两个频段之间的频率。一般来说，其它频率的电磁波完全不能被人眼感受到。



可见光谱从紫色（左）到红色（右）

当一缕阳光碰到一个球形水滴，它的一部分将从液滴的表面反射，但另一部分将进入它。当进入时，光线会弯曲或者说被折射，将吸管插进一杯水时会看到同样的现象。然后光线将继续行进直到液滴的后部。这时有些光线会离开水滴出去，但有些将被反射回来到液滴的另一边，并在这一过程中再次折射。（见图 1）

折射是一缕光线从一种介质传递到另一种介质而速度放缓的一个结果。一个非常粗略的类比是想象将一个购物推车以某种角度从路上推向草地：推车因为撞击草地将首先放缓，然后改变方向。

当太阳光通过一个真空（很好的近似是通过空气），所有频率都以每秒约 30 万公里的相同速度 c 行进。当光线进入水的时候，频率及由此所导致的颜色均保持不变。然而它的行进速度将发生变化，其数额取决于频率。这是因为水的原子结构与不同频率的波的相互作用不同。频率为 f 的光的速度放缓的一个度量由折射率 $n_{f,w}$ 给出。它的值不仅取决于频率 f，也取决于光线进入的

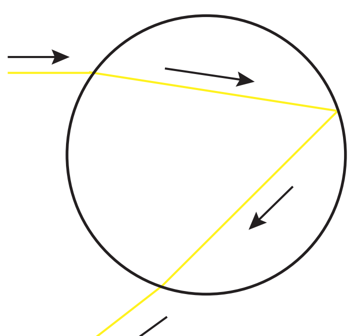


图 1. 一条光线被折射，反射，然后再次折射

介质（在这种情况下，是水，并用下标 w 所示）。该指数被定义为

$$n_{f,w}=\frac{\text{光在真空里的速度}}{\text{频率为}\,f\,\text{的光在水中的速度}}.$$

频率 f 变化时折射率几乎没有变化：$n_{f,w}$ 在频谱紫罗兰端约为 1.34，而在红色端为 1.33 左右。但这个小变化足以分解阳光，从而使我们看到彩虹那绚丽的光谱。（折射率也随温度略有变化，但这里我们可以忽略它。）

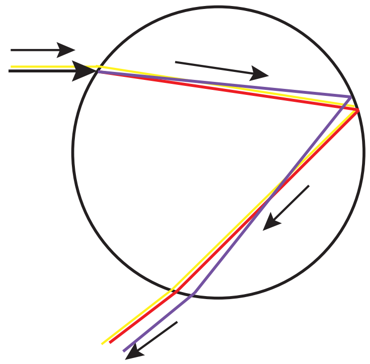


图 2. 不同频率的光有不同的折射

不同频率的光进入液滴的弯曲程度由斯涅耳定律（Snell's law）描述。该定律说，折射光线位于由入射光线和入射点法线所形成的平面上，法线是通过射线撞击液滴的那点并和液滴表面垂直的那条线。由于我们假设是球形的液滴，在这种情况下，法线是连接液滴中心和入射点半径所在的直线。

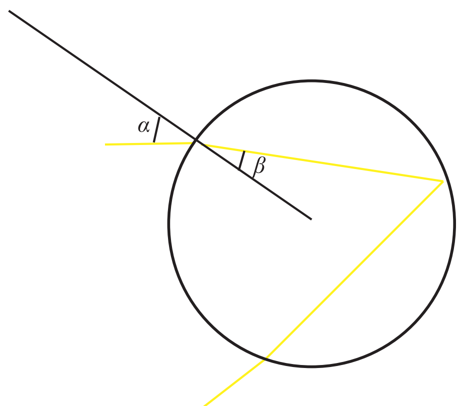


图 3. 包含入射光线和折射光线的水滴的横截面。斯涅耳定律表明角度 α 和 β 有关系

斯涅耳定律也告诉我们，光线折射的角度由下列方程决定：

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_{f,w}}{n_{f,a}}.$$

这里 α 和 β 是如图 3 所示的角度，$n_{f,a}$ 和 $n_{f,w}$ 是频率为 f 的光分别在空气和水中的折射率。由于空气非常类似真空，它的折射率 $n_{f,a}$ 对所有的频率几乎等于 1。因此，如果光线以角度 $\alpha=45°$ 碰到液滴，则折射率为 1.33 的红光对应的角度 β 为

$$\beta=\arcsin\frac{\sin 45°}{1.33}=32.12°.$$

上面的结果四舍五入到小数点后两位。折射率为 1.34 的紫外线光有

$$\beta=\arcsin\frac{\sin 45°}{1.34}=31.85°.$$

正是这些不同频率的光导致的不同折射角度，给出了彩虹的不同颜色。

捕捉彩虹光

但是，为什么我们看到的颜色形成一个完美的圆弧？要了解彩虹的形状，我们假定来自太阳的光可以看成一束平行光线并射向一个特定的水滴。使用斯涅耳定律和反射律（即入射角等于反射角），我们可以计算出一根射线关于它第一次进入液滴时的角

度 α 的偏离。换句话说，当它被折射、反射，然后再折射后以什么角度转向（见图 4）。这个角度当然因不同频率或不同颜色的光而异。

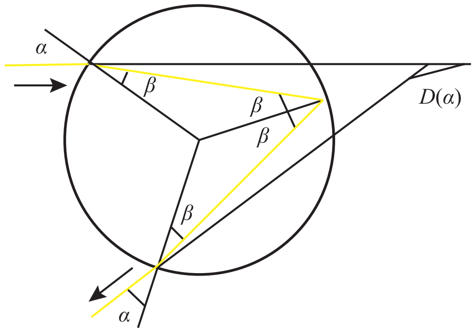


图 4. 算出的角度偏差

仔细地看一眼图 4 你就会相信，偏差 $D_f(\alpha)$ 由下面公式

$$D_f(\alpha) = (\alpha - \beta) + (180^\circ - 2\beta) + (\alpha - \beta) = 180^\circ + 2\alpha - 4\beta$$

给出。从斯涅耳定律，我们可以在上式中作替换

$$\beta = \arcsin \frac{\sin\alpha}{n_{f,w}}.$$

这里我们把空气的折射率取为 1。图 5 显示了 $D_f(\alpha)$ 的图像，这里对某一特别选取的红光阴影取折射率 $n_{f,w} = 1.33$。注意在 60° 左右某个 α_m 处它取一极小值。

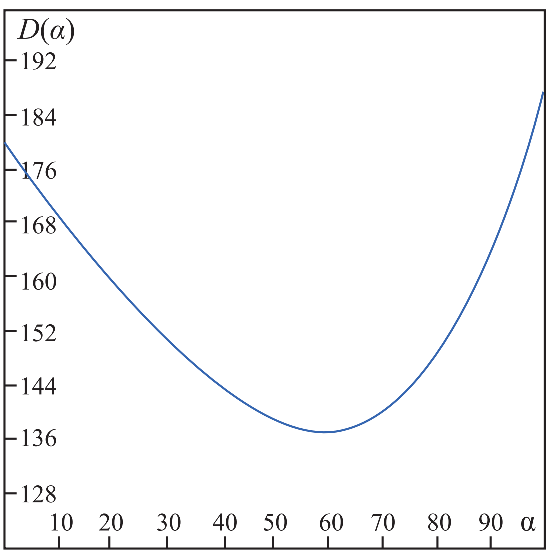


图 5. $D_f(\alpha)$ 的图像

就是这个最小角 α_m 给了我们彩虹。图 6 显示了液滴的一个包含一束光线的二维断面，折射率为 $n_{f,w} = 1.33$。在这个横截面上以最小角 α_m 进入的光线用红色显示，它被称为彩虹线。彩虹线附近的光线（角度接近 α_m）撞击液滴，在液滴中行进后，会围绕

着彩虹线的附近聚集。所以，如果你的眼睛正好赶上这液滴后端出现的彩虹线，你会看到一大堆的其它射线，使来自液滴的光显得特别强烈。由于所有的聚集光线有相同的颜色，如选取的是具有 $n_{f,w}=1.33$ 的红光颜色，则液滴在天空中呈现红色。

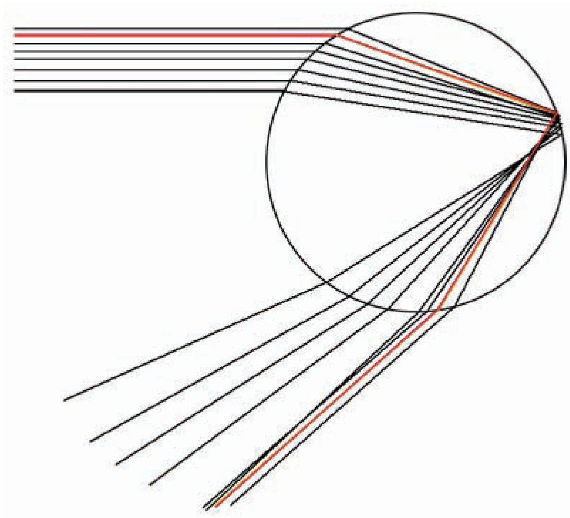


图 6. 图中彩虹线以红色表示。来自水滴的一簇光线在彩虹线周围出现，而其它地方出现的光线则更加分散。

因为 α_m 是函数 $D_f(\alpha)$ 的极小点，新出现的红色光线在彩虹附近聚集。你可以从图 7 看到这点。取以极小点为中心的一个区间 I_1 以及以其它点为中心具有同样长度的另一区间 I_2。对应于 I_1 内的值的角度值偏差范围（由区间 J_1 给出）比对应于 I_2 的角度偏差范围（区间 J_2）小得多。这样，以 I_1 中的角度 α 撞击液滴的光线会非常稠密，而以 I_2 中的角度 α 撞击液滴的光线将相对比较稀疏。

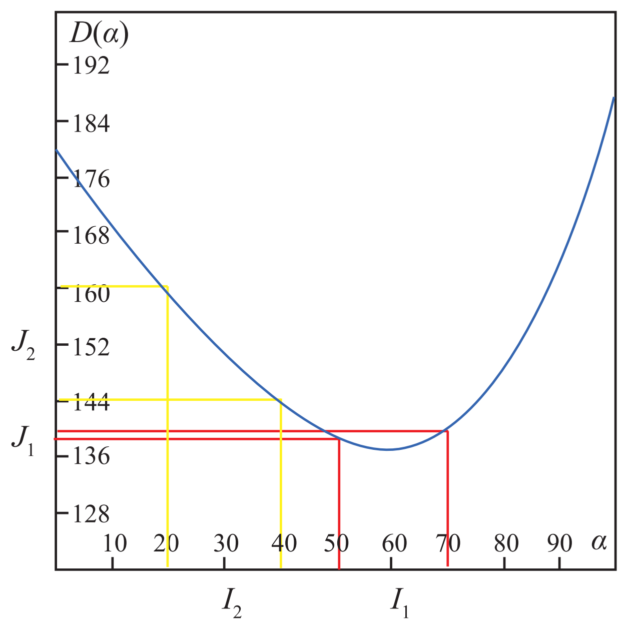


图 7. 区间 J_1 小于区间 J_2