



1978年，数学家约翰·麦凯（John McKay）注意到一种奇怪的巧合。在此之前，他一直在研究一个庞大的、被称为怪兽群（Monster Group）的结构表达式，因为数学家们相信它会捕捉到一种新型的对称。

实际上，当时数学家们并不十分确定怪兽群的存在，但他们坚信，如果存在的话，应该是隐藏在某类特定的空间内，其中，头两个空间的维数为1和196,883。

当时在加拿大蒙特利尔康戈迪亚大学（Concordia University）任教的麦凯不经意间阅读了一篇和怪兽群完全无关的文章，是关于数论里最基本的元素J-函数的。有趣的是，函数的第一个主要系数是196,884，麦凯警觉到这正是怪兽群前两个空间的维数之和。

大多数数学家认为这纯属巧合，因为没有任何理由去猜想怪兽群和J-函数之间的一丝一缕的联系。不过，这个发现还是引起了当时在佛罗里达大学（University of Florida）任教的菲尔兹奖得主约翰·汤普森（John Thompson）的注意。经过深入研究后，汤普森教授发现J-函数的第二个系数，21493760，正是怪兽群的前三个空间的维数之和。新的“巧合”似乎预示着J-函数掌控着怪兽群那让人捉摸不定的结构。

很快，另外两位数学家证实的大量类似的“巧合”让数学界不再相信其纯属偶然。1979年，一篇由任教于普林斯顿大学的约翰·康威（John Conway）和西蒙·诺顿（Simon Norton）发表的题为“怪兽月光”（*Monstrous Moonshine*）的文章推测：这种“巧合”一定是出自怪兽群和J-函数之间更深层的联系。德国波恩的马克斯·普朗克研究所（Max Planck Institute for Mathematics）的唐·乍基亚（Don Zagier）解释说“他们把它称为月光猜想是因为太神奇了，想法疯狂得让他们不希望有人可以证明的了。”

数学家们又花了几年时间才搞清楚怪兽群的



约翰·麦凯

结构。他们对这个延迟有充足的理由：怪兽群有多于  $10^{53}$  个元素，比一千个地球上的原子还多。密歇根大学（University of Michigan）的罗伯特·格里斯（Robert Griess）给出怪兽群结构十年之后的 1992 年，理查德·伯切德斯（Richard Borcherds）终于证明了怪兽月光猜想并由此获得菲尔兹奖。任职于美国加州大学伯克利分校的伯切德斯证明，处于数学世界里两个遥不可及空间里的怪兽群和 J-函数，确实由一座桥相连，那就是弦。这就好比宇宙世界里暗藏着众多微小的、无法捕捉到的隐形空间，由于连接它们的弦的摆动而使它们显形一样。

伯切德斯的发现在纯数学领域里掀起了一个巨大的波澜，最终导致了卡茨-穆迪代数（Kac-Moody algebra）的诞生。但从弦论的角度来看，它却像一潭死水。连接 J-函数和怪兽群的 24-维弦模型引不起大多弦论专家的兴趣。斯坦福大学（Stanford University）的弦论专家沙米特·卡赫鲁（Shamit Kachru）解释说“它就像弦论中的一个死角，引不起太多共鸣”。

然而，目前怪兽月光猜想正经历着一个复兴，很可能引起对弦论的深层探讨。过去 5 年里，从一个和麦凯发现类似的巧合开始，数学家和物理学家们逐渐意识到怪兽月光猜想仅仅是一个精彩故事的开始。

上周（英文原文发表的前一周——译者注），有学者在电子预印本档案（arxiv.org）上刊登了一篇对 2012 年提出的所谓朦胧月光猜想（Umbral Moonshine Conjecture）的数值证明。它提出，除了怪兽月光猜想之外，还有 23 个其它的月光猜想，每一个的一头指向某对称群的维数，另一头指向某个特殊函数的系数。这些猜想里的函数可以追溯到大半世纪前数学界的一个天才预见，那时候月光猜想还不曾闪过任何数学家的脑海。

这 23 个月光猜想都和弦论里被称为  $K_3$  曲面的 4 维物体有关。与凯斯西储大学（Case

Western Reserve University）的约翰·邓肯（John Duncan），芝加哥大学（University of Chicago）的杰弗里·哈维（Jeffrey Harvey）共同提出朦胧月光猜想的阿姆斯特丹大学（University of Amsterdam）和法国国家科学研究中心（France's National Center for Scientific Research）的米兰达·程（Miranda Cheng）解释说：“这个发现相当重要，我们必须搞清楚。”

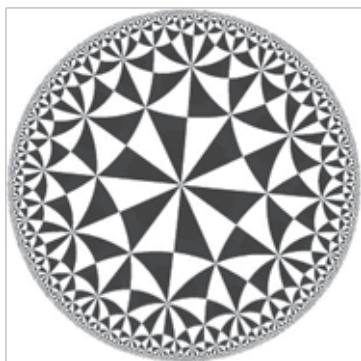
新的证明强烈地暗示到这 23 个猜想中的每一种都必须依赖弦论模型去搞懂其莫名其妙的数值联系。不过，证明并没有给出具体的弦论模型，这给物理学家们留下了一个有巨大诱惑力的难题。邓肯博士评价说“当我们最终弄清楚月光猜想的时候，它就变成一个物理问题了”。



米兰达·程

## 怪兽月光猜想

任何给定几何图形都和某种算数相对应。比如说，将一个正方形旋转 90 度再水平翻转的结果与将它对角翻转的结果是一样的。换言之“90 度旋转+水平翻转=对角翻转”。19 世纪里，数学家们意识到可以将此类算术提升成一个被称为群的代数实体。这种抽象的群可以代表许多不同图形的对称性，给数学家们提供了认识不同图形共性的简洁方式。进入 20 世纪后，数学家们致力于将这些群分类，他们渐渐发现了一个奇怪的现象：大多有限群都可以被划归成几类，但是有 26 个群却无法归类。这些异类群里，最大的、也是最后一个被发现的正是怪兽群。



镶嵌天使和魔鬼的盘子

麦凯的偶然发现之前，没有人会把怪兽群与怪兽月光猜想的另一位主角  $J$ -函数联系起来。 $J$ -函数属于一种特殊的函数，它们的图形类似于埃舍尔的镶嵌着天使和魔鬼的盘子 (M. C. Escher's tessellation of a disk)，不断重复。这些“标准”函数 (Modular forms) 是数论里的英雄，它们在 1994 年安德鲁·怀尔斯 (Andrew Wiles) 证明费马大定理时起了关键作用。卡赫鲁提到“任何数论里的重大发现极有可能是关于标准函数的”。

和声波类似， $J$ -函数的重复性可分解成一系列的纯音，其系数决定音量的大小。正是在这些系数里，麦凯发现了它们和怪兽群之间的奥妙。

90 年代初，在耶鲁大学的伊戈尔·弗兰克尔 (Igor Frenkel)，罗格斯大学 (Rutgers University) 的詹姆斯·勒泊斯基 (James Lepowsky) 和瑞典隆德大学 (Lund University) 的阿恩·默尔曼 (Arne Meurman) 的工作的基础上，伯切斯基将麦凯的发现又向前推进了一步。他证明确实存在着一个涉及  $J$ -函数和怪兽群的特殊弦论模型。具体来讲， $J$ -函数的系数代表了不同能量层弦摆动的不同方式，而怪兽群则代表了那些能量层的模型对称性。

伯切斯基的工作给数学家们指出了一条利用  $J$ -函数的系数来研究令人捉摸不定的怪兽群思路，毕竟，系数还是比较容易计算出来的。邓肯解释说“数学无外乎搭桥，通常数学家们对桥的一岸要比另一岸熟悉的多。但这座桥有点出人意外，没有证明很难想象它”。

## 新的月光

当数学家们正忙着探讨怪兽月光猜想时，弦论专家们则在关注着另一个看似毫不相关的领域：搞懂弦藏身的微小空间的几何结构。不同的结构可以让弦以不同的方式摆动，比如，把鼓面拉紧一点，鼓的音高就会不同。多年来，物理学家们一直致力于寻找衍生出世界各种物理现象的几何结构。

这种几何结构里最可能的几种都包含了被称为  $K_3$  的 4 维曲面。卡赫鲁解释到，与伯切斯基的弦模型的鲜为人知的事实相反， $K_3$  曲面在弦论的教科书里可是随处可见。

对  $K_3$  曲面的了解还不足以推算出每个能量层中弦摆动的不同方式，但物理学家可以用一个狭义的函数来推算出所有  $K_3$  曲面所呈现的某种特殊物理特征。2010 年，三位弦论专家，京都大学 (Kyoto University) 的江口辄 (Tohru Eguchi)，加州理工学院 (California Institute of Technology) 的大栗博司 (Hiroshi Ooguri) 和东京大学 (University of Tokyo) 的立川祐路 (Yuji Tachikawa)，注意到如果把把这个函数以特殊的方式表达出来，其系数正好和另一个拥有大约 2.5 亿个元素的异类群——马提厄群 (Mathieu 24 ( $M_{24}$ )) 的某些维数相同。至此，这三位物理学家又发现了一个新的月光。

这一次，数学家和物理学家都对新的发现欢呼雀跃。乍基亚说“我参加的几个会议上，所有



约翰·邓肯