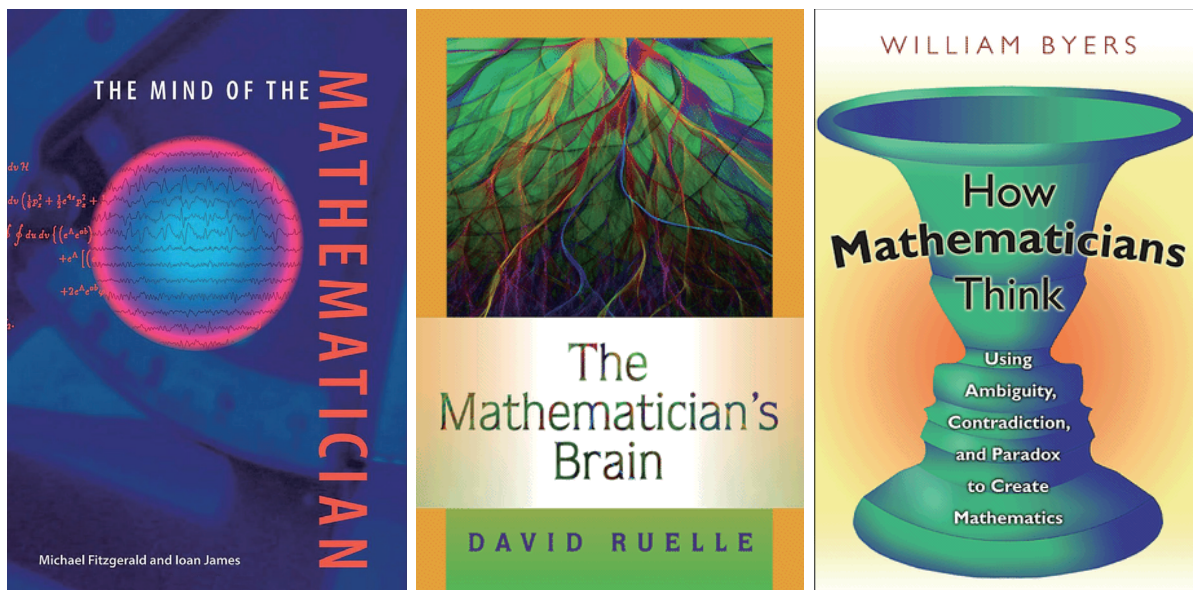


数学家的想法¹

Michael Atiyah / 文 王 兢 林开亮 / 译



左：Michael Fitzgerald 和 Ioan James 的《数学家的思维》(*The Mind of the Mathematician*, Johns Hopkins University Press, 2007. 196 页。)

中：David Ruelle, 《数学家的大脑》(*The Mathematician's Brain*, Princeton University Press, 2007. 160 页。)

右：William Byers, 《数学家如何思考》(*How Mathematicians Think*, Princeton University Press, 2007. 424 页。)

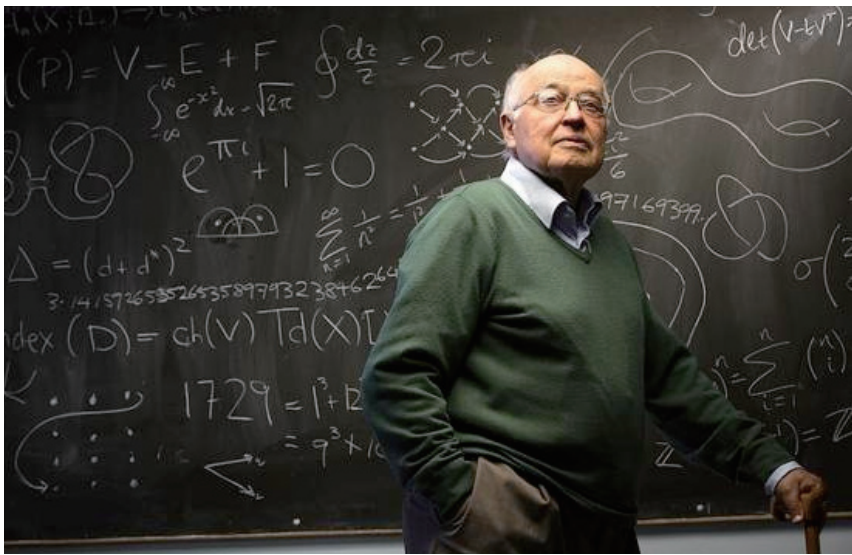
我们如何思考？想法是什么？是否存在许多不同的思想？我们的想法怎样与外部世界发生联系？此类问题已经被哲学家们思考了几千年。虽然并没有真正的答案，但是这些问题得以澄清，而且我们在这个过程中学到了一些东西。现代神经科学的发展正在改变这一情形，并开始揭示整个领域。可以期望，在 21 世纪末，我们对人脑的理解意味着许多古老的哲学问题将不复存在，就像我们已经不再追问“生命是

什么”，取而代之的是一个新的学科：分子生物学，它结合了 DNA 和遗传密码。

但同时，向此目标迈进时，构思出关于大脑如何运作的更准确的问题是有帮助的，这使之能够通过实验考察。多种多样的扫描技术使我们能处理与心理学和神经生理学有关的问题。通过这种方式，我们开始理解心理过程的生理基础。

大脑不同区域的作用，特别是与视觉的关系，已经被发现。事实上，视觉是进化的巨大成功，它的机制占据了人脑很大一部分。所以它当然已经被开发以支撑大脑的思考过程。但是，视觉参与思考的程度宜于进行科学分析，结果很可能会比仅仅回答诸如“你是用语言还是用图像进行思考”要复杂得多。

¹ 本文原标题“*Thoughts of a Mathematician*”，译自 Brain (2008), 131, 1156-1160. 电子版见 <http://brain.oxfordjournals.org/content/131/4/1156>.



本文作者著名数学家阿蒂亚

研究复杂现象的一个基本的科学方法是除去那些无关的因素，研究它的最简单或最纯粹的形式。那什么是“纯粹的想法”？有很强的证据表明，数学是最纯粹的思想形式，其中外部世界几乎被隔离出去了。大部分时间，我们的想法与感官知觉交织在一起，因此很难将其从大脑的其他活动中分离出来。数学看起来提供无拘无束的想法，尤其是“纯数学”，这与数学在科学方面的应用形成对比。

因此“数学家如何思考”这个问题引起了众多科学家的兴趣，尽管它对数学家有特殊的吸引力。我们可以自认为是理想的受试者，尽管毫无疑问这是一种错觉。当然，本文所评论的三本书表明这个话题是非常有趣的，而数学家有更特殊的贡献。

认识到数学以不同的层次存在——正如小学阶段的英语、更高级的诗歌、莎士比亚的戏剧是不同的——是重要的。所有人都学习初等算术，但是只有一小部分人学习更高级的数学，而更少的人创造新的数学——他们相当于职业“诗人”。

对数学想法的分析不得不聚焦于特定的层次，而解答可能不统一。大脑的不同部分可能参与不同层次的数学。

其实数学本身是一个层次分明的学科，每一层都是建立在之前的层次上，这就是为什么少受一年的教育可能导致灾难性的后果。这种层次结构与抽象发展是一致的。在这个过程中许多类似的现象被组合到一起，形成下一个层次的基石。一个表现这种抽象过

程的例子是：从算术到代数经历了确定的数字 1, 2, 3 被变量符号如 x, y, z 代替的过程。

因此在考察“数学想法”时我们必须对不同的层次采取不同的方式，并考察从一个层次进入下一个层次的抽象过程，因为它可能对应着大脑的某些组织方面。

关于数学思想的许多讨论倾向于集中理解算术的初等运算。每个人对此都很熟悉，因为它们简单，容易被实验检验。例如，乘法表，需要记忆，似乎涉及到大脑用于学习语言的部分。另一

方面，理解数的意义则是另一种不同的技能，它是以前的大脑的其他部位为基础的。

而为了更深入地探讨数学思想，我们必须考虑一个基本的问题：数学是什么？它是人脑的创造还是经验的产物？我们像柏拉图那样相信存在一个包含完美的圆和精准直线的理想世界吗？“柏拉图主义者”认为数学定理是“外在”的，它们等待被发现，而数学家就像是哥伦布一样的探索者。“现实主义者”则认为数学思想源于实际经验——我们试图找出背后的模式，并提出“定理”帮助理解其中的结构。休谟(David Hume)是现实主义者，支持和反对休谟的哲学家都大有人在。许多数学家本能地是柏拉图主义者，他们相信理念世界的独立存在性。康德对这些问题进行了深入思考，而且他的想法随时间不断发展，然而他的结论是，某些真理（比如欧几里得几何的基本事实）对人脑而言是先天存在的，尽管其他是后天习得的。一些数学史家认为非欧几何的发展表明康德是错的，没有真理是先天存在的。但是这种解释可能太肤浅，以至于不能得到现代神经生理学的支持。简单的实验似乎表明大小（用以区别多少）的抽象概念是大脑固有的和内在的。更多的实验可能表明更多的数学——既是实在的又是结构化的——是固有的。

当然这把我们带回一种进化的观点。为了使得人类在进化斗争中获得成功，人脑已经进化了。从现实世界抽象出来的数学原理固化到大脑后，使后者具有明显的优势。这或许可以帮助解释我们是如何生来

就有数学能力。休谟、康德以及其他哲学家之间的争论发生在达尔文主义之前的时代，它容易忽略这样的事实：人脑本身是自然界的一部分，并由自然之力形成。非欧几何的发现不能改变这样的事实：欧几里得几何是非常好的近似。原始人不会从非欧几何受益。这种进化的观点模糊了柏拉图主义和现实主义之间的界限，但神秘仍然存在。

伽利略的名言是“自然之书用数学语言写就”。到了20世纪，若不用复杂的数学，要描述基础物理（如量子物理）的定律是不可能的。这个事实给匈牙利物理学家维格纳（Eugene Wigner）留下深刻印象，他称之为“数学在物理中不可思议的有效性”。只有在处理人类尺度的物理时，进化在某种程度上才能解释这种现象。引人注目的是，物理的数学理论很好地适用于微观尺度和宏观尺度，从亚原子到星系。为了逃避丛林中的老虎，我们没有必要研究黑洞，因此进化不能解释一切。

如果数学的最终起源和本质仍然是一个艰深的问题，那么我们可以尝试其他路径以描述数学。它的主题是什么？物理学、化学、生物学不难描述，尽管边界会改变，主题会融合。但是数学的内容更广泛。“空间 and 数的研究”、“模式的研究”、“有序和无序的研究”都曾被用来描述数学。然而数学很难限定，它一直在扩展。形式主义者不顾一切地要把数学作为逻辑的一个分支。此乃公理化的观点：即从不需要定义的对象和数据（点和线）出发，利用严格的逻辑准则推导出有意思的结果——欧几里得风格的证明就是此法的例子。该方法在20世纪上半叶得到广泛发展。

然而，大多数数学家承认这种方法效果有限。它描述了支架和基础，但忽略了整个建筑的其他方面，最明显的是美学角度。公理和法则中没有诗意。

那些曾在课堂上饱受无意义公式煎熬的非数学家，倾向于将数学等同于枯燥的形式方法。

这就是为什么他们认为计算机使数学家变得无用，或者使之降低为技术员。但数学家将自己看做是富有创造力的艺术家，以优雅和美为向导。新的洞见不是由形式操作产生的，它们依赖于思想，而原创的思想不能批发制造。

如果说被评论的三本书有一个最重要的共同点，那就是它们都将数学看作是创造性的事业，近似于艺术创作。数学是人的活动，因此也必须从这个角度去理解。数学有严格的规则，而绘画、音乐和诗歌也是如此。但他们的核心不在规则，而是在规则之外。而

且，有时规则不得不被打破，或者至少要重新理解。事实上，不管是数学还是其他艺术，最重要的步骤往往在于天才激发灵感突破规则。例如，熟知的代数规则 $xy = yx$ （交换律）在19世纪被打破了，产生了意义深远和数量丰富的成果。

在所有的艺术形式中，建筑也许是与数学最相似的。严格的工程准则防止建筑倒塌，设计中蕴含几何，最终细节非常复杂，但是整个建筑的架构愿景才是最重要的。奇怪的是，数学家们倾向于把自己比作是诗人，而后者往往只懂得肤浅的数学。伟大的德国数学家外尔在说“我的工作总是试图将真理和美结合起来，而当我只能二选一时，我通常选择美”时展现了他的诗人天性。

魏尔斯特拉斯，对数学严格化做出重要贡献的一位早期的德国数学家，他的一句让人出乎意料的话是：一个真正的数学家必须有诗人的心灵。

尽管这三本书有很多共同之处，而且都认为诗歌是与数学最接近的艺术形式，但是它们采用的方法是不同的。粗略地讲它们处理了以下三个话题：

数学是什么

数学家如何思考

数学的人性（personality）

吕埃尔（David Ruelle）专长数学物理，他尝试向最一般的读者解释数学是什么和数学家如何开展他们的工作。任何阅读该书的数学家都将承认他对我们的事业的描述，包括日常方面和赋予它生命的更基础、富有创造性的过程。这本书组织有序，表述清晰，展现了处于工作状态的数学家的真实形象。

贝尔斯（William Byers）的表述更散漫，覆盖的内容更广。他更有雄心去确定数学创造的本质，并围绕它展开讨论。他的副标题“用模糊性、矛盾和悖论来创造数学”清晰地展示了他的主题：数学的核心并非如大多数人所认为的那样是依靠逻辑和规则的。

因为他在写一本厚书，贝尔斯有足够的篇幅讨论数学历史和数学发展过程中面对的问题。他通过许多例子指出，在逻辑非常重要的话题中，矛盾和悖论发挥了至关重要的作用。矛盾就像是司机在拐错路时遇到的禁入标志，而悖论就像是四面八方都禁入的交叉路口。公路工程从这些交叉点学到一些东西，或许会想出新的解决方案如地下通道或立交桥。因此，深思熟虑后，不应该惊奇像数学这样有“公路法规”的学科不得不处理矛盾的情形。而且在这个过程中学

到的经验教训可能在将来发挥基本的作用。

但真正吸引贝尔斯的是“模糊性 (ambiguity)”。在清晰和准确要求最高的科目，贝尔斯被那些清晰性失效的情形吸引了，这些地方事情变得模糊不清。贝尔斯不但不把这种模糊性看作是系统的弱点、失败，反而认为它们是创造过程的催化剂。既然不同的结果是可能的，就存在灵活性和开放性。仔细研究模糊性能展示隐藏的含义，打开通往新旅程的大门。

贝尔斯非常能言善辩，论据充分，然而我没有被完全说服。试图找到创造过程的本质有点好高骛远，注定会失败。贝尔斯举了很多例子以支持他的观点，然而他扩展了“模糊性”的含义以达到他的目的。

尽管上帝可能是在大爆炸中，从真空中创造了宇宙，但是人类创造是有祖先的。这个“前创造”时代是不完全的或者说模糊的。无法清楚预知什么被创造。可是用模糊性解释创造性近乎同义反复。

著名的法国数学家庞加莱分析了他自己的经验，结论是创造性偶然浮现。当大脑意识停止活动一段时间后，关键的突破自发出现（顿悟——译者注）。

杰拉德 (Michael Fitzgerald) 和詹姆斯 (Ioan James) 的书展现了心理学家和数学家之间的合作。他们感兴趣的是数学家的个性以及个性如何与他的工作发生联系。数学家有某种共同的个性品质吗？如果有，数学会产生个性——学得太多聪明孩子也会变傻 (too much work makes Jack a dull boy) ——还是具有这些个性的人自动被数学吸引？当然，在公众视野中，数学家常常是漫画中心不在焉的、忘了自己是否吃过午饭的教授。

杰拉德和詹姆斯的工作均始于对自闭症的研究，尤其是阿斯伯格综合症，其特点是不关心外部世界，常伴随着对数学或音乐的强烈的关注。而且，这种关注或者是特定领域的不同寻常的能力的反应或者是由该能力产生的。关于这些的一部优秀小说是哈登 (Mark Haddon) 的《深夜小狗神秘事件》(The curious incident of the dog in the night-time)²。

虽然书的前半部以一般形式讨论了数学，这与其他两本书重合，但是后半部书收集了许多历史上著名数学家的简介。这些简介 (包含一些不太出名的人物) 自身就饶有趣味，而他们之所以被选中是因为其表现出了数学家的个性，而且可能患有阿斯伯格综合症。

试图从一小部分著名人物得到关于数学家心理的结论，这比较困难。用于讨论这类问题的细致的统计分析不可能适用于数量少、非随机选取 (恰恰相

反，它们是作为证据选取的) 的情形。

即使所有的简介清楚地展现了阿斯伯格综合症，那么以上论述也是真的。实际上，这与事实相去甚远。公平地说，作者没有下这样的结论。一小部分有心理问题，但是许多人是正常的。

有人认为特别的心理状态 (例如狂躁) 能促进创造性，但这点是有争议的。另一方面，专注，不管是自然的还是由某些症状引起的，可能更有成效——这个观点更可信。

与考察以往的著名人物相比，我更喜欢用 50 年来我所知道的数学家的经验。这包括我们这个时代的绝大部分杰出的数学家。我的结论 (不管价值如何) 是，确实有一小部分非常怪异的个体，其中可能患有阿斯伯格综合症。半开玩笑地说，其中一部分连鞋带都不会系。幸运的是，数学圈容忍这样的奇葩，甚至允许他们享有盛名。尽管如此，与全体相比，我们所讨论的是很小一部分。在这个小圈子之外，数学家的个性与其他学术群体一样丰富多彩。在我看来，阿斯伯格综合症在数学创造力中不起重大或典型作用。

另一类心理案例在数学圈广受关注，这就是计算奇才，包括“智障天才”。这些人展现出了超强的计算能力，能对庞大的数字作出迅速处理。理解这种奇才的心理基础极具挑战性，它可能表明隐藏在数学计算后面的潜意识过程。看起来意识和潜意识的运行速度差别很大。从发展的观点看，这是容易理解的：逃离丛林中的老虎需要速度。而此时意识帮助不大，尽管事后反应会暗示我们避免去茂密的丛林。

既然所有三本书都同意富有创造力的数学家是诗人，不是计算机，那么是否要离开那些想在更高层次上理解数学思想的神经生理学家？形式步骤，如初等算术或者代数显然不够，需要更深入的挖掘。

一个吸引人的想法是聚焦于数学家所领会到的“美”的概念。所有数学家都承认它起着至关重要的作用，尽管很难确定它指的是什么。正如在艺术中，我们能列出许多令人满意的特征来说明美——优雅、比例、微妙、深度、有意义，但最后当看到它的时候，我们才会知道它。重要的是“情人眼里出西施”：美是主观的。对于美的判定，我们不能达成一致。艺术或数学有许

² 译者注：《深夜小狗神秘事件》是一部英国畅销书，主角克里斯托弗 (Christopher) 拥有超人的数学天赋，但内心脆弱而敏感。