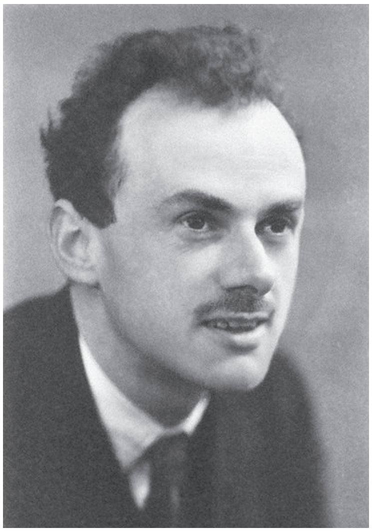
狄拉克和他的 δ 函数

陈关荣

如果让我选一个“最优美的函数”的话，我会选“狄拉克 δ 函数”。

1

狄拉克 δ 函数为数学家、物理学家及工程技术人员所熟悉；它由英国科学家保罗•狄拉克引进，因而得名。



保罗•狄拉克

保罗•狄拉克（Paul Adrien Maurice Dirac）1902 年 8 月 8 日出生于英国的布里斯托尔（Bristol），就读于主教路（Bishop Road）小学，在和布里斯托尔大学合办的 Merchant Venturers 男子技术学校（现已不存在）读完中学，之后在布里斯托尔大学工学院电子工程及应用数学专业以优异成绩毕业，最后于 1926 年在剑桥大学圣约翰学院取得物理博士学位。

有两件事足以表明狄拉克在学术界的地位：英国剑桥大学有一个灿耀得无与伦比的卢卡斯数学荣誉讲座教授职位，于 1663 年根据当时著名的大学议会议员亨利•卢卡斯（Henry Lucas）的捐款和遗愿而设立。曾荣登此宝座的有大名鼎鼎的牛顿和霍金。1932 年，30 岁的狄拉克便荣膺这个桂冠。翌年，狄拉克和薛定谔（Erwin Schrödinger）一起分享了当年的诺贝尔物理奖。

我通常认为狄拉克是一个“工程物理数学家”。在向大家作更详尽的解释之前，先让我们一起来简要地回顾他的 δ 函数的背景和简史。

对于工程技术人员、物理学和应用科学家们来说，下面这两个式子算是定义了 δ 函数：

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty & x=x_0\in R,\\ 0 & \text{otherwise},\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1.$$

这两个式子一目了然且功能巨大：对实轴 R 上的任何连续函数 $f(x)$ 和任何实数 r 都有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-r)dx=f(r).$$

这实在太好用了，不是吗？

数学家对此不以为然，因为它不是一个常义下的标准实值函数。它只是一种广义函数，因而需要把它的定义严格化。现在知道，可以把 δ 函数严格地定义为一种测度：对定义在实轴上任意连续函数 $f(\cdot)$，可以令 δ 为满足 Lebesgue–Stieltjes 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta\{dx\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\{H(x)\}$$

的一种测度，其中 $H(x)$ 是 Heaviside 阶梯函数。也可以把 δ 函数严格地定义为一种 Sobolev-Schwartz 分布：考虑一个包含所有某类足够光滑的、在实轴上具有紧支集 Ω 的函数 ϕ（称为试验函数）的空间 S。此空间中每一个有定义的连续线性泛函都称为是一个分布。一个定义在空间 S 中具有紧支集 Ω ={0} 的线性泛函被称为狄拉克 δ 函数。

在这里让我们更感兴趣的，是 δ 函数出现的历史契机。

几乎所有的科学发现和技术发明都有历史可循，基本相同或相似的思想火花在漫长的过去时常已有浮现甚至多次闪烁。回顾一下历史，数学家和物理学家共同探讨数学问题的现象在十九世纪初就已经很普遍，那时许多科学家同时是数学家和物理学家。δ 函数的基本思想可以追溯到泊松（Siméon Poisson）在 1815 年关于复平面上线积分的研究以及傅立叶（Jean-Baptiste Fourier）在 1822 年关于热的解析理论一书。特别是柯西（Augustin-Louis Cauchy）在 1815 年写成、1827 年发表的一篇关于无穷小分析的论文里，实际上已经使用了无限高和无限窄的单位脉冲来做积分核，因此后人也称之为柯西 δ 函数，或柯西 - 狄拉克 δ 函数。后来，基尔霍夫（Gustav Kirchhoff ）在 1882 年关于积分方程的研究和海威赛（Oliver Heaviside）在 1883 年关于奇异函数的求导中，都间接隐晦地使用了实质上的 δ 函数。

我们今天使用的 δ 函数的简单明确表述形式归功于狄拉克。狄拉克需要 δ 函数的主要动因来自他对量子力学的研究。也许是基于下面马上就要来介绍的狄拉克关于 δ 函数的自然又合理的引进方式，后人都把它称为“狄拉克 δ 函数”。

早在十九世纪，克罗内克（Leopold Kronecker）就引进了离散 δ 函数

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

其中 i 和 j 为任意整数。狄拉克 δ 函数是对它的一种自然却又艰难的推广。我们不妨猜测，狄拉克当时考虑一个粒子 a 的量子态，并创造性地用符号 $|a\rangle$ 来标记（现称为狄拉克符号）。首先，狄拉克把它在一个有限维的完备内积空间中作展开：

$$|a\rangle = a_1|x_1\rangle + a_2|x_2\rangle + \cdots a_n|x_n\rangle,$$

其中 $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ 为正交基底，满足 $\langle x_i|x_j\rangle = \delta_{ij}$， $i,j=1,2,\ldots,n$。于是，从基底态 $|x_i\rangle$ 去计算量子态 $|a\rangle$ 的概率为 $p_i = \langle x_i|a\rangle = a_i$，从而

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i|a\rangle |x_i\rangle,$$

然后，狄拉克要把上式推广到无穷维的量子态空间去，以便描述粒子 a 的完全状态：

$$|a\rangle = a_1|x_1\rangle + a_2|x_2\rangle + \cdots a_n|x_n\rangle + \cdots.$$

因为粒子 a 的量子态是连续而不是离散的，从而需要把这个无穷级数换成积分：

$$|a\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)|x\rangle\, dx,$$

其中 $f(x)$ 是在位置 x 上粒子出现的概率，满足

$$f(x') = \langle x'|a\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\langle x'|x\rangle\, dx.$$

这个关系式对所有的量子态 $|a\rangle$ 成立，因而对所有的 $f(x)$ 也成立。剩下的问题是如何去找“函数”$\langle x'|x\rangle$ 使得上述积分成立。为简单起见，考虑位置 $x'=0$ 并记 $g(x)=\langle 0|x\rangle$。于是上式变成

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx.$$

啊哈，这个“函数”$g(x)$，不就是狄拉克想要的“δ 函数”吗？！

δ 函数是狄拉克留给后人的一个可喜可贺的数学贡献。更重要的是，狄拉克的名字和二十世纪最重要的科学成果之一的“量子力学”密不可分。

1928 年狄拉克 26 岁，提出了一个符合相对论的关于电子的方程式，即后来著名的狄拉克方程，这里简写为：

$$(i^{-1}r^{\mu}\partial_{\mu}+m)\psi = 0,$$

其中 m 为质量，r^{μ} 是狄拉克引进的特殊矩阵（现称为狄拉克矩阵），ψ 是狄拉克引进的一个用于描述自旋 $-\frac{1}{2}$ 基本粒子场（现称为狄拉克场）。这个方程式被后人称为是世界上和历史上最漂亮的几个方程式之一，它能非常成功地推导出所有已知的关于电子的属性。但是，这个方程式隐含着一个致命的问题，就是它有具有负能量的量子态的解，而这一点是违背当时物理学基本理论的。可是，把这种解丢掉的话又会引来一些数学的内在矛盾。怎么办呢？

狄拉克在冥思苦想了两年之后，在 1930 年提出了一个非常大胆的猜想：具有负能量的量子态是存在的，只是我们还没有观测到！他的论据是，这种量子态通常被电子占据了，而电子又遵循不兼容原理，所以其它电子无法进驻这些带负能量的量子态，致使这些负能量态好像不起任何作用；但是，一旦某个负能量态空了出来，它的行为就会像一个带正电的粒子一样。狄拉克认为这个“空穴”应该是一种新粒子，并称之为正电子。他还指出，真空中充满了无限多这种具有负能量的粒子态，后人称之为“狄拉克海”。

时间很快又过去了两年。1932 年，卡尔•安德森（Carl Anderson）在宇宙线中发现了正电子，证实了狄拉克的预言真的是“空穴来风”！当时的新闻震惊了整个科技界。狄拉克因此和薛定谔一起分享了 1933 年的诺贝尔物理奖——那时狄拉克才 31 岁，在他剑桥大学博士论文《量子力学》答辩七年之后。这期间，狄拉克还发展了费米-狄拉克（Fermi-Dirac）统计原理并开创了量子电动力学。顺便提及，到 1936 年，卡尔•安德森也获得了诺贝尔物理奖。

狄拉克对正电子的正确预测是近代理论物理最伟大辉煌的成就之一。现在我们知道，不仅负电子有其相反的正电子，所有粒子都有其反粒子——反质子和反中子于 1955-56 年相继在美国加州劳伦斯-伯克利国家实验室（Lawrence Berkeley National Laboratory）中被发现，反氢原子则于 1995 年在欧洲核子研究组织（CERN）被成功制造出来——反粒子的存在性证明是量子力学与相对论相结合之后的必然结果。

前面说过，几乎所有的科学发现和技术发明都有历史可循。历史纪录表明，在德国出生的英国物理学家舒斯特（Sir Franz Schuster）早在1898年就曾两次写信给《自然》杂志，推测反原子和太阳系中反物质的存在。狄拉克则给出了科学理论根据。今天科学家们虽然相信反粒子可以进一步构成各种物质的反物质，但同时也知道反物质与物质并不对称地存在，它们在太阳系中微乎其微并且与物质相互湮灭，因而不会对人类带来特别的好处或者伤害——至少目前来看是这样。

1927年第五次索尔维（Solvay）会议参与者（摄于比利时索尔维国际物理研究所）;这是一幅被称为“世界上最具睿智的大脑群集”的世纪照片，包括爱因斯坦（前排，左五）和居里夫人（前排，左三）等；狄拉克站在全幅照片的正中央（二排，左五）

狄拉克极具天才物理学家的直觉。1931年，他在对电磁场理论做了深入研究后得出一个令人惊奇的结论：电场和磁场应当对称。他认为如果存在只有一个极而不是同时具有南北两极的磁粒子（称为磁单极子）的话，电和磁现象就具有美好的完全对称性。狄拉克预测了磁单极子的存在。它不仅使麦克斯韦方程具有了完全对称的形式，而且可以解释电荷的量子化现象，条件是任何带电粒子的电荷必须是单位电荷的整数倍以及任何带磁粒子（磁单极子）的磁荷必须是单位磁荷的整数倍。这一结论揭示了电荷和磁荷的不连续性，解释了悬而未决的“电荷量子化”难题。可是，多年来科学家们通过种种方式寻找磁单极子，均一无所获，直到1994年美国物理学家塞伯格（Nathan Seiberg）和威滕（Edward Witten）才从理论上证明磁单极子可以存在。不过，功夫不负有心人，2013年德国亥姆霍兹国家研究中心联合会（Helmholtz-Gemeinschaft）的研究人员莫里斯（Jonathan Morris）在其他大学同事的协作下，首次观测到了磁单极子在一种实际材料中出现的过程，从而证实了它的存在。他们的研究报告于当年9月3日发表在《科学》杂志上。

2

自古名人多轶事，狄拉克也不例外。

狄拉克一生多思寡言，总是被同事称为怪诞之人。当年剑桥大学的同事们在描述狄拉克时有一个善意的玩笑，把“一小时说一个字”定义为1个“狄拉克单位”，足见他平日言辞之少。伦敦博物馆资深研究员格雷厄姆·法米罗（Graham Farmelo）在