数学模型之美

靖 新

什么是美？这个问题起源于柏拉图的提问。

古希腊哲学家认为，世界的本源，即实体，是由质料加形式所构成的，“秩序和比例的明确”是美的形式特征。确定事物是否美，必须依据量的原则和秩序的原则，把事物各个不同的因素，组成一个和谐统一的整体。

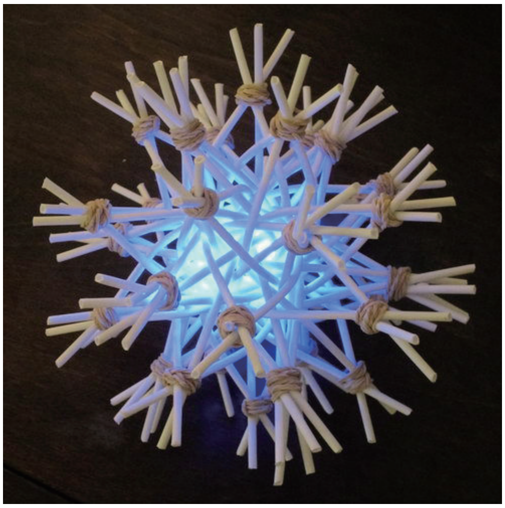
在中国的传统哲学思想中，认为美的本质是自然。这里指的自然是指符合事物的规律，也就是中国哲学中所说的“道”。及至现代，我国著名美学家朱光潜先生在《谈美》中指出，“每个科学家和哲学家对于他所见到的真理觉得有趣味，就会用一股热忱去欣赏它。当真理成为情趣中心时，就成为了美感的对象。”

对于数学家来说，当他的意志、智慧、激情都专注于这种情趣中心时，由此所激发出来的本质力量极具创造性。

哈代曾有言：“数学家的模式，就像画家或诗人的模式一样，是充满美感的；数学的概念就像画家的颜色或诗人的文字一样，一定会和谐地组合在一起。美感是首要的试金石，丑陋的数学在世界上是站不住脚的。”罗素说：“数学，如果正确地看它，不但拥有真理，而且有至高的美，这是一种庄重而严格的美，这种美不是投合于我们天性中的脆弱的方面，而是纯净到了崇高的地步，能够达到严格且只有最伟大的艺术才能显示的那种完美的境地。”克莱因在《西方文化中的数学》一书中强调，“作为一种宝贵的、无可比拟的人类成就，数学在使人赏心悦目和提供审美价值方面，至少可与其他任何一种文化门类媲美。”

数学本身就是对美的一种规定，是自然的、艺术的、统一的。这种隐匿的和谐以某种数学模型投射到我们的大脑之中，使我们能够对自然中所发生的事件进行分析、了解、认识、描述和解释。数学模型之美，就是在与它无数次周旋、回望之中萌生于心的情怀。

一、数学模型之美



模型（model）作为原型的替代物，是为了某个特定目的对原型的简缩、模仿和提炼。模型无处不在。例如，汽车模型、人体模型、建筑模型等等。

数学模型是针对现实世界的特定对象，为了一定目的，进行必要的简化和假设，运用数学的符号、关系式等，概括表达问题的数量关系和空间形式的一种工具。作为一种思考和解决问题的方法，数学模型或者能够解释特定现象的现实性态，或者能够预测所研究问题的未来发展状况，或者能够提供度量的工具，或者为处理实际问题提供科学合理的决策。

和创造一个有魅力的艺术作品一样，数学模型也是一种创造，而且是必须符合美学原则的创造。数学模型之美，就表现在它所揭示的客观规律的科学性和合理性，表现在它的简洁之美、抽象之美、对称之美、奇异之美、统一之美等等，表现在建立这个数学模型的过程之中。

1. 数学模型的简洁之美

现实世界就是一个复杂与简单的结合体。数学模型恰恰是人类思维经济化的体现。一个问题（Case Studies）看似复杂，但是，当我们运用简化的方法拨开迷雾、去伪存真的时候，可能会惊喜地发现，其实就是这么简单。

爱因斯坦曾说：“从希腊哲学到现代物理学的整个科学中，不断有人力图把表面上极为复杂的自然现象归结为几个简单的基本概念和关系，这就是简单性原则。”

他还精辟地指出：“人们总想以最适当的方式来画出一幅简化的和易领悟的世界图像。于是他们就试图用他们这种世界体系来代替经验的世界，并来征服它。”

我们可以用两句话：“数学模型如诗，数学模型如画”来形容数学模型的简洁之美。

一首诗，是用最少的语汇来表达天、地、人之间的最大量的思想和感情。

一幅画，是要在有限的画面上来表达最多的情感和事物。

这是一个提炼的过程。数学模型通常只是所研究的那部分现实世界的一种虚构、简化的版本。假设、简洁、优雅的表达十分重要。

例如，在同样的高度，一个乒乓球和一个高尔夫球做自由落体运动，它们应该同时到达平坦的地面。描述这个问题，需要以简化问题的方式给出假设，即设想是在保持真空的状态之中。

数学模型的简洁美，概括起来就表现在四个方面：

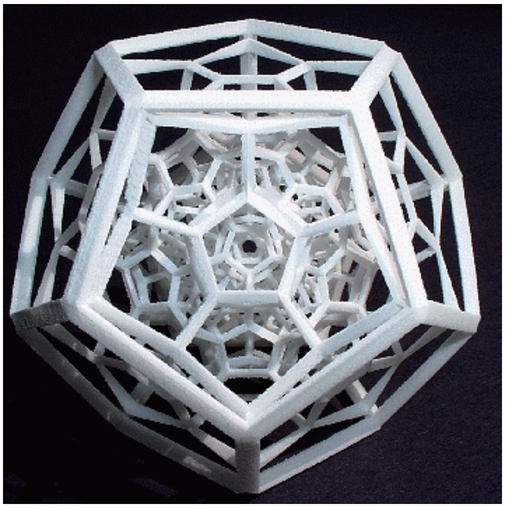
追求较少的假设条件——这样，才能使模型与客观实际密切相对应，因为合理的假设而对结果产生微不足道的影响，保存了那份“真”；

形式简洁、逻辑清晰——这样的模型往往“好看”，并且可以便于进行精确的计算；

采用尽可能简单的方法——体现了人脑思维和电脑活动经济化的要求；

推出广泛而深刻的结论——使问题脱离物理上的实在，给出符合一些特定规则的符号表达式，利于应用。

2. 数学模型的抽象之美



抽象，我们常常只是看到了它晦涩的一面，却很少领会其高级的“直觉”之美。正是有了抽象，我们才能看见那些平常看不见的、更贴近存在本质的现实。抽象是人类的一种高级的智慧。

数学的抽象就是对某类事物共性的描述，只保留量的关系和空间形式而舍弃了其它一切。数学的抽象是一级一级逐步提高的，它们所达到的抽象程度大大超过了其他学科中的一般抽象。数学本身几乎就完全周旋于抽象概念和它们的相互关系的圈子之中。

其实，抽象也并不是数学独有的特征，任何一门科学和艺术都有抽象。比如，在绘画中，抽象性就有很好的运用。

20 世纪的超现实主义的艺术大师米罗（Joan Miró, 1893-1983）的“抽象画”，貌似信手涂鸦，其实，米罗从具象到抽象的过程都经过了极为缜密的思考，是精心的设计的结果。米罗的作品充满了异想天开的情趣，有着极高的“直觉表现力”，他的各种表达使我们看到其所形成的具象已经被抽象成为了简约的符号。

数学家哈尔莫斯（Paul Halmos）说：“在绘画与数学中，美有客观标准。画家讲究结构、线条、造型、肌理，而数学家则讲究真实、正确、新奇、普遍。数学家因为对发现的纯粹爱好和其对脑力劳动产品的美的欣赏，创造了抽象和理想化的真理。”

在数学建模时，抽象是必不可少的手段。抽象使我们能够脱离一些具象而揭示本质。例如，图论模型可以用在多种场合。这种由点和连线组成的模型不需要考虑点表示的究竟是地区、还是课程，还是其他什么具体的东西。

数学模型的抽象之美就体现在：

透过具象，穿越时空——同样的模型可以研究很多不同的现象；

抽象分析，深入本质——这样才能提取实际问题的重要特征；

描述问题中的关系——暂时与现实世界的具象脱离，在纯粹的数学世界中建立关系，预测和掌握变化趋势，推出具有普遍性的结论。

3. 数学模型的对称之美

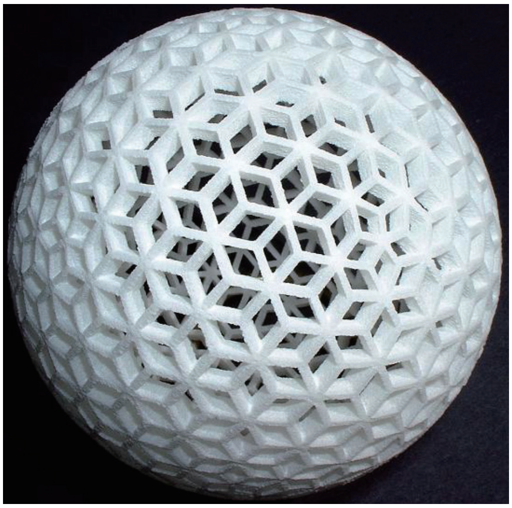
在自然界中，对称作为一种物态的表现形式，可以说无处不在。蝴蝶美丽的双翅，在各类动物中五官的形象，甚至皮毛的纹络，都呈现千姿百态的对称因素。对称也活跃于数学模型中。

对称，是在一定的变换条件下的不变现象。1951 年，德国数学家外尔（H.Weyl）给出对称性一个十分形象的描述：“对一个事物进行一个变动或操作，如果经过操作后，使该事物完全复原，则称该事物对所经历的操作是对称的。”

由于操作方式不同，有四种对称：恒等、旋转、反射、平移。

几何、代数、分析中都存在着大量的对称。我们在用数学模型来描述客观规律时，对称性也展示了独特的魅力。

在建筑设计中，建筑师基于数学的思想，把对称性之美发挥到了极致，许多美轮



美奂的建筑都展现了数学模型的对称之美。

4. 数学模型的奇异之美

13 世纪的英国哲学家培根（Roger Bacon）说：“没有一个极美的东西不是在匀称中有着某些奇特。”“美在于奇特而令人惊异。”

奇异，从字面上理解，是特别的、突出的、新颖的、奇特的意思。“奇异性”，也常常指人类社会不断发展过程中，出现的某些现代科学解答不了的事物。

数学模型的奇异美包括两方面的内容：奇妙和变异。

关于奇妙——我们知道，数学中有许多的公式和结论非常神奇，神奇得令人惊叹！比如著名的欧拉公式：$e^{i\pi}=\cos\theta+i\sin\theta$，这里 θ 是实数，如果取 $\theta=\pi$，得到一个被数学家公认的最美的公式 $e^{i\pi}+1=0$，它将数学中最重要的 5 个常数：0, 1, π, e, i, 通过三种最基本的运算：加法运算、乘法运算、幂运算，联系在了一个式子里，体现了分析、代数、几何密不可分的曼妙。

关于变异——通常有两种情形：

第一，可能是我们的判断出了问题，没有认清问题本质而导致了错误。

第二，因为与已知相悖，所以，激发起人们的探索欲望，产生了新的数学思想、数学方法和数学理论。这可以使我们联想起数学的三大悖论。

数学模型的奇异美可以从三个方面来展示：

模型的新颖性——创新的模型具有重要的意义和研究的趣味；

方法的创造性——独特的方法其本身就极其具有吸引力；

结果的奇妙性——当结果历经千辛万般苦，终于产生出来时，那种心跳的感觉，就如同见到了倾心的恋人。

5. 数学模型的统一之美

新奇的效果可能由简单产生，而新奇的理论又可能导致高度的统一。

统一，是合为整体，或者说是指一致性。统一美反映的是审美对象在形式或内容上的某种共同性或关联性。

庞加莱在《科学方法》一书中这样阐明了他的美学思想：“数学的美感、数和形的和谐感、几何学的雅致感是一切真正的数学家都知道的真实的审美感。缺乏这种审美感的人永远不会成为真正的创造者。”

数学模型的统一美就表现在：

建模目标的一致性——实际问题的客观性决定了它的建模目标是不可分裂的；

数学模型的统一性——描述一个问题可能有不同的模型，但彼此之间常常会有着本质的联系。

计算结果的相近性——建立数学模型解决问题时，可能角度不同、方法不同，求解的路径可能不同，但是，因为问题本身的规律性和客观性，计算结果会在一定允许误差范围内惊人的相近。所谓条条大路通罗马，殊途同归。