美丽肥皂泡背后的数学

林馨怡　保继光

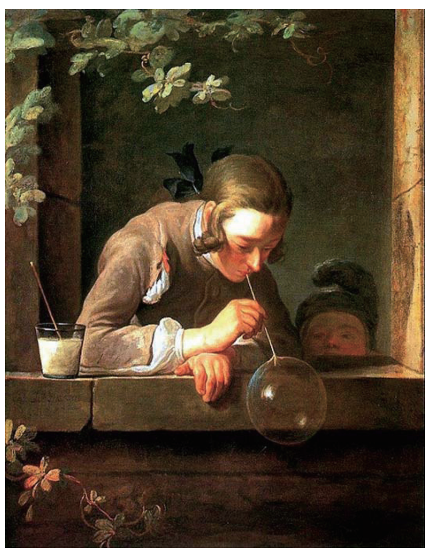

图 1. 温哥华的容纳 181 人的肥皂泡；图 2. 参加莫斯科肥皂泡节的民众；图 3. 英国肥皂泡大师山姆在表演；图 4. 伦勃朗的油画《持肥皂泡的孩子》；图 5. 夏尔丹的油画《吹肥皂泡的少年》

几乎每个人都吹过肥皂泡，甚至成年人也会很有兴趣地玩。2012 年 9 月 19 日，在温哥华，加拿大籍华裔泡泡艺术家杨范打破由他本人保持的吉尼斯世界纪录，将 181 名参与者容纳在一个巨型肥皂泡中（图 1）。2013 年 5 月 2 日，在莫斯科，一年一度的肥皂泡节在全俄会展中心举行，庆祝春天的到来（图 2）。2013 年 8 月 23 日，在香港举行了“健力士世界纪录大开眼界”活动，特邀英国肥皂泡大师 Samsam 表演了最多肥皂泡弹跳、最长肥皂泡串、最大室内肥皂泡以及大泡套小泡等梦幻优美的技艺（图 3）。除了好玩，肥皂泡也得到了高雅艺术的青睐。荷兰历史上最伟大的画家伦勃朗（Rembrandt van Rijn）和 18 世纪的法国画家夏尔丹（Jean-Baptiste-Siméon Chardin）分别创作了世界名画《持肥皂泡的孩子》和《吹肥皂泡的少年》。

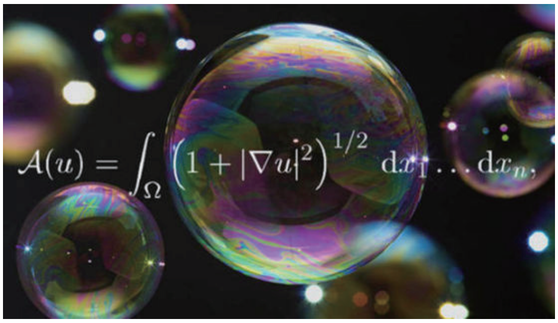

图 6. 极小曲面方程

图 7. 东京街头景观——极小曲面亭

图 8. 纽约科学馆中的极小曲面华盖

事实上，肥皂泡还有重要的科学背景。2013 年，美国科学新闻网站 www.Livescience.com 刊登出了由世界各国科学家们鼎力推荐的十大影响世界文明进程的“魅力方程”，极小曲面方程便在其中。“这个方程在某种程度上解释了人们吹出的那些肥皂泡的秘密。”美国数学家、首届美国国家杰出教学奖获得者 Frank Morgan 在推荐时表示，这个非线性方程描述了美丽肥皂泡背后的数学。肥皂泡蕴含的极小曲面问题与偏微分方程、微分几何、复变函数、变分法、拓扑学等多个方向都有着十分重要的联系，向人们展示了曲面的美感和几何的魅力。

20 世纪 50 年代，新设计学派提出的“极小曲面”理念开创了现代张拉膜结构设计的先河。基于这种理论，对于特定边界条件得到的膜结构表面积最小，从而耗能最少。这类膜建筑的主要结构特点是预应力在整个结构中均匀分布。例如，东京街头景观——极小曲面亭、纽约科学馆中的极小曲面华盖、德国 boxel 实验馆中由 2000 多个啤酒箱组成的极小曲面和厦门园博园中的极小曲面建筑。

1 极小曲面及其方程

1744 年，有史以来最伟大的数学家之一欧拉出版了《寻求具有极大或极小性质的曲线》(*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*)（图 11），这标志着变分法作为一个新的数学分支的诞生。在该书中，欧拉提出了这样一个问题：求出在点 (x_0, y_0) 和点 (x_1, y_1) 之间的平面曲线 $y = f(x)$，使得它在绕 x 轴旋转时所产生的曲面面积最小。欧拉证明了它必须是一段悬链线

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

其中 c 是一个正常数。因其函数图像与悬挂在两点的绳子在均匀引力作用下自然下垂之形相似而称之为悬链线，悬链线生成的旋转面叫做悬链面。

1760 年，法国数学家拉格朗日以欧拉的思路和结果为依据，得到了更完善的结果。他的论文《关于确定不定积分式的极大极

图 9. 德国 boxel 实验馆中的“啤酒箱”极小曲面

图 10. 厦门园博园中的极小曲面建筑

小的一种新方法》(*Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*)是用分析方法建立变分法的代表作。他发表前写信给欧拉时，称此文中的方法为“变分方法”(the method of variation)。欧拉肯定了，并在他自己的论文中正式将此方法命名为“变分法”(the calculus of variation)。

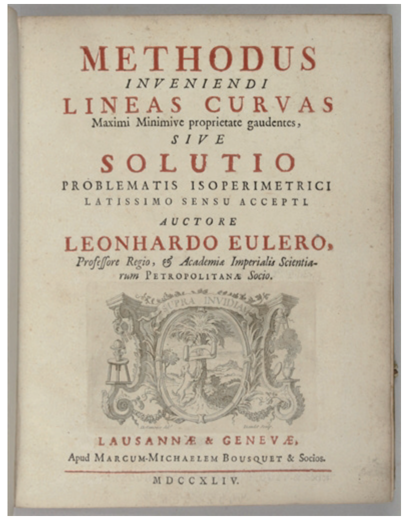

图 11. 欧拉的《寻求具有极大或极小性质的曲线》

在三维空间中考虑曲面 $M: z = u(x, y)$，$(x, y) \in D$，其中 D 是平面上的一个光滑区域。拉格朗日利用他创立的变分法原理证明了：所有定义在 D 上且在边界 ∂D 上取相同值的光滑函数图像中，若曲面 M 的面积最小，则 u 满足极小曲面方程

$$\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad (x,y)\in D. \tag{1}$$

我们下面对 (1) 给出一个简单的证明。设

$$M_t: z = u(x, y) + tv(x, y), \qquad (x, y) \in D,$$

其中 $t \in (-1,1)$，v 在边界 ∂D 上取值为 0，则 M_t 的面积

$$A(M_t)=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial(u+tv)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(u+tv)}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \tag{2}$$

若 $A(M_0)$ 的值最小，即 $A(M_t) \geq A(M_0)$，则 $A(M_t)$ 在 $t = 0$ 处取极小值 $A(M_0)$，从而

$$\frac{d}{dt}(A(M_t))\bigg|_{t=0}=0.$$

在 (2) 式中对 t 求导，再应用散度定理(即高维分部积分公式)，注意到 v 在边界 ∂D 上取值为 0，并根据 v 的任意性，可以得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}\right)=0.$$

它也经常被求导展开，去掉分母，就可以写成方程 (1)。

很显然，线性函数 $u(x, y) = ax + by + c$ 是方程 (1) 的一个解，也就是说，平面是一个极小曲面。当给函数 $u(x, y)$ 附加一些条件时，我们能够得到极小曲面方程的两个非线性函数的特解。

如果要求 M 是一个旋转面，那么函数 $u(x, y)$ 可以表示成

$$u(x,y)=h(r),\qquad r=\sqrt{x^2+y^2},$$

其中 $h(r)$ 是待定的单变量函数。将 u 的表达式代入 (1) 式得到

$$h''+\frac{1}{r}(h'+h'^3)=0.$$

解这个常微分方程，有

$$h(r)=\frac{1}{c}\ln\left(cr+\sqrt{c^2r^2-1}\right)+c_1,$$

$$u(x,y)=\frac{1}{c}\ln\left(c\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{c^2(x^2+y^2)-1}\right)+c_1,$$

c 和 c_1 是任意常数。取 $c_1 = 0$，则上面的表达式可以写成

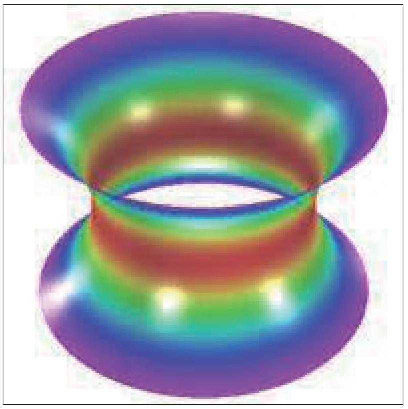

图 12. 悬链面

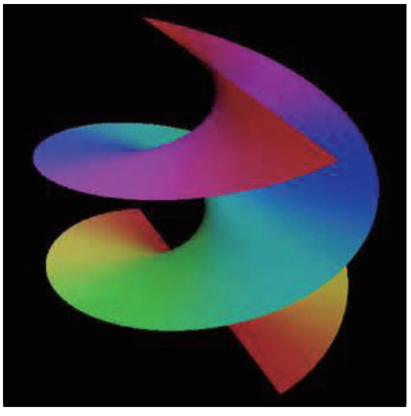

图 13. 螺旋面

$$\cosh(cz) = c\sqrt{x^2 + y^2},$$

这里的 cosh 表示双曲余弦函数，此时 M 就是悬链面。

如果要求 M 是一个直纹面，即由直线运动所产生的曲面，那么函数 $u(x, y)$ 可以表示成

$$u(x, y) = h(t), \qquad t = \frac{x}{y},$$

将 u 的表达式代入 (1) 式得到

$$(1+t^2)h''(t) + 2th'(t) = 0.$$

解这个微分方程就可以得到

$$h(t) = c \cdot \arctan t + c_1,$$

c 和 c_1 是任意常数。取 $c_1 = 0$，则方程的解为

$$z = c \cdot \arctan \frac{x}{y}.$$

这就是正螺旋面。螺旋面是继平面、悬链面之后，人们知道的第三种极小曲面。

1776 年，画法几何创始人蒙日（Gaspard Monge）的学生、法国数学家莫尼耶（Jean Baptiste Meusnier, 1754-1793）给出了方程 (1) 的几何解释：解曲面的平均曲率为零；证明了等高线是直线的极小曲面只有螺旋面，非平凡的旋转极小曲面只有悬链面。1842 年，比利时数学家卡塔兰（Eugène Catalan, 1814-1894）证明了只有平面和螺旋面两种直纹极小曲面。

经典极小曲面的例子除悬链面、螺旋面外，还有 Scherk 曲面 (1834)、Enneper 曲面 (1863)、Gyroid 曲面 (1970) 与 Costa 曲面 (1982) 等 [1, 2]。

2 极小曲面的 Weierstrass 公式

1866 年，德国数学家魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass，1815-1897）发现了用复变函数给出的极小曲面方程的通解，从本质上揭示了极小曲面与全纯函数、亚纯函数之间的联系。他证明了曲面是极小曲面等价于它的坐标是等温参数（使曲面第一基本形式中的 $E = G$，$F = 0$ 的参数）的调和函数。

设 M：$r = r(u, v)$ 是以 $(u, v) \in D$ 为等温参数的极小曲面，且不是平行于 xy- 坐标面的一块平面，则存在 D 上的全纯函数 f 和亚纯函数 g，f 的零点集和 g 的极点集是重合的，f 的零点阶数等于该点作为 g 的极点阶数的两倍，使得曲面 M 的参数方程 $r(u, v)$，$w = u + iv$，可以表示为

$$\begin{cases} x = \mathrm{Re}\int_{w_0}^{w} \frac{1}{2} f(1-g^2)\,dw, \\ y = \mathrm{Re}\int_{w_0}^{w} \frac{i}{2} f(1+g^2)\,dw, \\ z = \mathrm{Re}\int_{w_0}^{w} fg\,dw. \end{cases} \qquad (3)$$

[1] Almgren F. J., Minimal surface forms，The Mathematical Intelligencer，1982，4(4): 164-172。

[2] 陈维桓，极小曲面，大连理工大学出版社，2011。