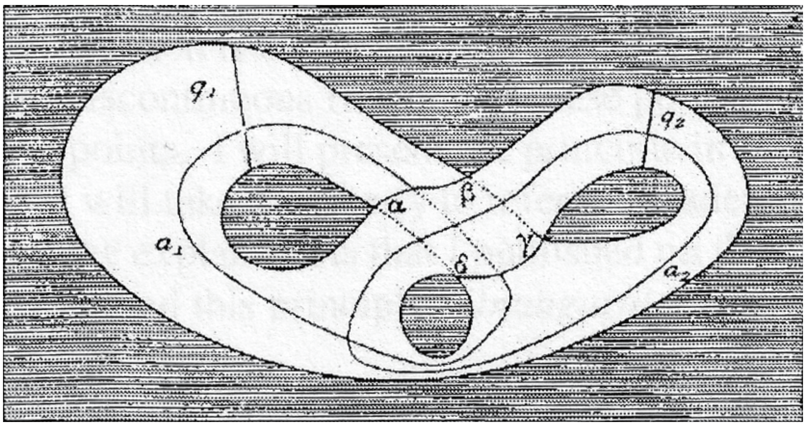
黎曼面的起源

陈 跃



黎曼原始论文中的黎曼面图形

黎曼面也称黎曼曲面，顾名思义，它是由数学家黎曼（G. F. B. Riemann）构想出来的一种抽象曲面。黎曼面这个看上去似乎比较简单的几何基本概念对于近现代数学发展的影响，可以说是无与伦比的，由它产生的一些深刻数学原理推动了现代数学的一大批分支学科（包括代数几何、数论、代数拓扑、多复分析、微分几何、偏微分方程等）的发展。从某种程度上说，黎曼面理论已经成为了当今人们叩开现代数学之门的钥匙。本文简要叙述了黎曼面这个重要概念的历史来源及其形成过程。

1 椭圆积分及其加法公式

我们知道在微积分（或高等数学、数学分析）里有一种所谓的“积不出来”的不定积分——即不可能求出原函数的积分。例如在计算像椭圆这样一些常用曲线的弧长时，17 世纪的数学家们就遇到了这种类型的积分。设椭圆的参数方程为：$x = a\cos\theta$、$y = b\sin\theta$（其中 $b > a$），则关于 θ 从 0 到 α 的弧长 L 为

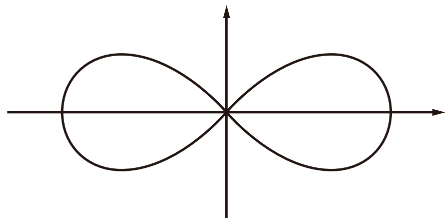
$$\mathrm{L} = \int_0^{\alpha} \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\,d\theta = b\int_0^{\alpha}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta,$$

其中 $k^2 = 1 - (a/b)^2$ 。再作换元 $\theta = \arcsin t$ ，可得

$$\mathrm{L} = b\int_0^{\sin\alpha}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt = b\int_0^{\sin\alpha}\frac{1-k^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,dt, \qquad (1)$$

这是一个不可能有初等函数原函数的定积分。

又例如人们在计算双纽线的弧长时也遇到了这种积分。由伯努利（J. Bernoulli）发现的双纽线是平面上到两定点 $(-a, 0)$ 和 $(a, 0)$ 的距离之积等于常数 a^2 的点轨迹，它的图形像一个横着写的 8，



它的极坐标方程为 $r^2=2a^2\cos 2\theta$，再由曲线弧长公式

$$L=\int_0^a\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta,$$

可得

$$L=\sqrt{2}a\int_0^a\frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}=\sqrt{2}a\int_0^a\frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}},$$

现在作换 u 元 $=\tan\theta$，则有

$$\sin^2\theta=\frac{u^2}{1+u^2}\text{ 和 }d\theta=\frac{du}{1+u^2},$$

从而得到

$$L=\sqrt{2}a\int_0^x\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}, \qquad (2)$$

这里的 $x=\tan\alpha$。这个积分也是积不出来的。

以上的两个积分 (1) 与 (2) 都属于如下形式的所谓的椭圆积分

$$\int_\beta^\alpha\frac{r(t)}{\sqrt{p(t)}}dt, \qquad (3)$$

其中的 $r(t)$ 是有理函数，而分母中的 $p(t)$ 是 3 次或 4 次的多项式函数。在历史上，“椭圆积分”这个名称就是从上述求椭圆曲线的弧长问题而来的。可以证明，椭圆积分中的 3 次多项式可以经过换元变成 4 次多项式的形式，反过来，4 次多项式也可以变成 3 次多项式的形式。

从 18 世纪初开始，以法尼亚诺（G. F. Fagnano）、欧拉（L. Euler）和勒让德（A. M. Legendre）为代表，一批数学家对椭圆积分的性质进行了初步的研究，发现了椭圆积分的“加法公式”。

下面我们对比较简单的椭圆积分 (2) 来逐步推导出这个加法公式。先对这个积分进行换元变换 $v^2=2u^2/(1-u^4)$，对这个换元式子的两边关于变量 u 进行求导，可得

$$v\frac{dv}{du}=\frac{2u(1+u^4)}{(1-u^4)^2}.$$

由于 $v=\sqrt{2}u/\sqrt{1-u^4}$，所以有

$$dv=\frac{\sqrt{2}(1+u^4)}{\sqrt{(1-u^4)^{3/2}}}du,$$

再由 $\sqrt{1+v^4}=(1+u^4)/(1-u^4)$，得到

$$\frac{dv}{\sqrt{1+v^4}}=\frac{\sqrt{2}du}{\sqrt{1-u^4}},$$

从而得

$$\int_0^x \frac{\sqrt{2}du}{\sqrt{1-u^4}}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^4}}} \frac{dv}{\sqrt{1+v^4}}. \qquad (4)$$

再对上式右边的积分继续作另一换元变换 $t^2=2v^2/(1+v^4)$，经过同样的计算过程可以得到

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^4}}} \frac{dv}{\sqrt{1+v^4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}. \qquad (5)$$

现在合并 (4) 与 (5) 式，就得到了曾经由意大利数学家法尼亚诺在 1718 年发现的双纽线的弧长加倍公式

$$2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}=\int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}. \qquad (6)$$

这个不寻常的等式不久就引起了欧拉的注意，他在 1753 年证明了以下的加法公式：

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}+\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}=\int_0^{\frac{x\sqrt{1-y^4}+y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}. \qquad (7)$$

这个重要的公式之所以这样称呼，是因为它类似于三角函数中关于反正弦函数的加法公式

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}+\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

上式即是我们所熟悉的三角公式

$$\arcsin x+\arcsin y=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})$$

的积分表达形式。我们看到，双纽线的弧长加倍公式 (6) 正是加法公式 (7) 当 $x=y$ 时的特殊情形。

欧拉的加法公式 (7) 的证明其实也是运用了换元法，只是此时的换元变换比较复杂而已。由于受到双纽线弧长加倍公式 (6) 的右边积分上限 $2x\sqrt{1-x^4}/(1+x^4)$ 的启发，对于积分 (2)，考虑 u 和 v 之间的换元变换式

$$\frac{u\sqrt{1-v^4}+v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}=r, \qquad (8)$$

其中的 r 是常数。为了寻找出微元 du 与 dv 之间的关系，引入中间变量 $U=\sqrt{1-u^4}$ 和 $V=\sqrt{1-v^4}$，(8) 式就变成了 $(uU+vV)/(1+u^2v^2)=r$，将 v 看成是 u 的函数，对这个式子的两边关于 u 求导，经过仔细的运算后可以推导出以下的等式：

$$\left(\frac{du}{U}+\frac{dv}{V}\right)\left[UV(1-u^2v^2)-2uv(u^2+v^2)\right]=0. \qquad (9)$$

从 (8) 知道，当 $u=0$ 时 $v=r$，此时上式方括号里的式子变成

$$UV(1-u^2v^2)-2uv(u^2+v^2)=\sqrt{1-r^4},$$

所以当 r 与 u 充分靠近 0 时，$UV(1-u^2v^2)-2uv(u^2+v^2)$ 不为 0 。因此从 (9) 式可知

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}+\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}=0.$$

设在此换元变换中，积分 (2) 的上限 x 对应于 y，而 0 又对应了 r，所以由上式可得

$$\int_0^x\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}=-\int_r^y\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}=-\int_r^0\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}-\int_0^y\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}.$$

最后再由 (8) 式中的等量关系知道，此时有

$$r=\frac{x\sqrt{1-y^4}+y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2},$$

从而就得到了加法公式 (7)。

欧拉不仅像这样证明了加法公式 (7)，还进一步对更一般的椭圆积分推导出了加法公式

$$\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+at^2-t^4}}+\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{1+at^2-t^4}}=\int_0^{\frac{x\sqrt{1+ay^2-y^4}+y\sqrt{1+ax^2-x^4}}{1+x^2y^2}}\frac{dt}{\sqrt{1+at^2-t^4}}. \tag{10}$$

他甚至还想把上式中根号内的多项式次数提高到 5 和 6 次的情形，但他发现此时这样的等式不会成立。

18 世纪末的数学家勒让得在欧拉研究的基础上，比较系统地研究了椭圆积分。他在这方面的最大功绩是得到了椭圆积分的三种标准形式，使得其他所有的各种椭圆积分都可以通过积分的某些变换化成这三种标准的形式，这样，就像其他的一些常见的特殊函数一样，人们能够制作出专门的椭圆积分用表，供需要实际计算椭圆积分的人们查阅。

然而，真正的数学家是不会满足于仅仅求出椭圆积分值的，他们希望能够找出隐藏在这种不寻常的积分性质——加法公式背后的东西。

2 阿贝尔积分、阿贝尔定理和椭圆函数

椭圆积分理论的进一步深入研究，还有赖于复变函数的积分理论的出现。复变函数论被数学史家 M. 克莱因（M. Kline）称为是 19 世纪最独特的创造，他说："这一最丰饶的数学分支，曾被称为这个世纪的数学享受，它也曾被欢呼为抽象科学中最和谐的理论之一。"复变函数的微分与积分理论其实是 18 世纪发展起来的微积分理论的自然延伸。在 19 世纪初，柯西在研究计算二重积分的累次积分方法时，无意中发现了复变函数论中最著名的柯西积分定理——全纯（解析）函数在单连通区域边界上的复积分为零，由此得到了关于留数计算等一系列的基本结果。人们发现，只有将实积分变成复积分，椭圆积分以及更一般的阿贝尔积分的性质才有可能得到比较完整的描述，所以从 19 世纪起，这些积分基本上都是作为复积分来进行研究的。

阿贝尔（N. H. Abel）是一位生活于 19 世纪初期的挪威数学家。他在欧拉研究椭圆积分成果的基础上，朝着现代黎曼面理论的方向，向前跨出了一大步。阿贝尔的第一个思想是所谓的"阿贝尔和"的概念，也就是将前述的椭圆积分加法公式中积分和的现象提炼出来，考虑能否用到若干个同类阿贝尔积分的和上。所谓阿贝尔积分，是