



传奇数学家斯梅尔

王则柯

当代富有色彩的著名数学家，首推长期工作在美国加州伯克利大学的史蒂芬·斯梅尔（Stephen Smale）教授。国内一般学术刊物介绍科学家时，谨守学术成就，避忌色彩。然而，就斯梅尔而言，他的学术成就和他的生活色彩，实互为补充，相辅相成。笔者喜欢读斯梅尔的文章，并与他有过互访的交往，愿借《数学文化》之一角，将所知所闻介绍给读者。本文从他在数学方面的工作谈起，最后补充若干生平故事。

斯梅尔教授属于当今世界上最杰出的数学科学家之列，在微分拓扑、动力系统、混沌理论、大范围变分学、计算复杂性、数理经济学和统计学习理论等众多领域，他都做出了重要贡献。他早年在拓扑学和动力系统方面的工作非常突出。他成功解决了微分拓扑学中的高维庞加莱（Poincaré）猜测，并创立了现代微分动力系统理论。

既然主要是介绍人物，有些含义深刻的专门概念也就直观地或通俗地叙述。好在这些叙述，即使在学术圈子内，亦属标准。至于不同层次的读者会有不同层次的理解，则正是这种叙述的精妙所在。愿意对人物或概念有更多了解的读者，可以先看一些数学史类的出版物。

庞氏猜测一狂生

青年时代的斯梅尔，因证明高维庞加莱猜测，在

1966年莫斯科世界数学家大会上获得菲尔兹奖。当然，他的这一伟大成果，决不是一蹴而就的。

所谓 n 维庞加莱猜测，是这样命题：与 n 维球具有相同伦型的紧致 n 维流形，必同胚于 n 维球。

庞加莱在1900年曾宣布：他已就一般的 n 维情形证明了上述命题。4年以后，他又发表论文，用一个反例说明他当初用以证明上述命题的方法不对。一般认为，庞加莱和希尔伯特（David Hilbert）是对20世纪的数学发展具有最大影响的两位数学家。

在随后的几十年里，许多数学家曾声称证明了3维的庞加莱猜测，但是后来都被发现不正确。

斯梅尔1930年出生在美国密歇根州弗林特市远郊的一个小地方。在他求学的20世纪50年代，正逢拓扑学的黄金时代，数学的前沿发展几乎被拓扑学所垄断。当时，美国对数学研究的资助，有一半给了拓扑学家，这在今天已难以想象。的确，拓扑学的作用是革命性的，它与代数结合发展了 K 理论和代数几何，与分析结合产生了动力系统理论和偏微分方程的整体性讨论。1954年，托姆（Rene Thom）的配边理论发表；1956年，米尔诺（John Milnor）证明了存在7维怪球。

斯梅尔头一次听说庞加莱猜测是在1955年，那时他正在密歇根大学写他的博士学位论文。几天以后，他觉得自已能证明3维的庞加莱猜测了，于是他走进萨梅尔逊

(Hans Samelson) 教授的办公室，十分激动地向教授讲述他的想法：首先对 3 维流形进行单纯剖分，然后取走一个 3 维单形，只要能够证明剩余的流形同胚于一个 3 维单形，就大功告成。因为随后再逐个取走 3 维单形的做法并不改变同胚关系，所以继续这样做下去，由于单形数目有限，最后当然只剩下一个 3 维单形，于是证明完成。萨梅尔逊教授听了这个年轻学生的讲述，并没有说什么话。斯梅尔后来幽默地回忆说，离开萨梅尔逊教授的办公室后，他才猛醒自己的证明中根本没有用到庞加莱猜测中关于 3 维流形的任何假设！

将近 5 年以后在巴西的里约热内卢，斯梅尔曾认为自己找到了 3 维庞加莱猜测的一个反例，并写成了论文。如果这个反例是对的，就会是一个与证明高维庞加莱猜测相当的重大成果。但是，经再次检查以后，也是他自己发现这个反例不成立。

精英环境好磨砺

斯梅尔 1957 年在密歇根大学取得博士学位，导师是波特 (Raoul Bott) 教授。当年夏天，他到墨西哥城参加了一次重要的代数拓扑学学术会议。这是他首次参加学术会议。在那里，他不但见到了当时的大部分拓扑学名家，还结识了芝加哥大学的两名研究生赫希 (Moe Hirsch) 和利马 (Elon Lima)。秋天，他开始作为一名讲师，在芝加哥大学的一个学院里给人文科学的学生讲授集合论。当然，他十分关心数学系的学术活动，从不放过托姆关于横截 (Transversality) 理论的每一个讲座。他自己正在进行的研究课题，则是证明球可以从里面翻出来。

那个时候，由于陈省身、韦伊 (Andre Weil) 等许多著名学者都在芝加哥大学，那里是数学研究的一个中心。青年学子赫希、利马、拉索夫 (Dick Lashof)、帕莱士 (Dick Palais) 和斯滕伯格 (Shlomo Sternberg) 也开始显示活力。

1958 年秋，斯梅尔藉国家科学基金会一份两年的博士后资助，到了普林斯顿高等研究院。拓扑学在普林斯顿非常活跃。在那里，斯梅尔和赫希合用一个办公室，一起去听米尔诺关于特征类的讲座，参加波雷尔 (Armand Borel) 关于变换群的讨论班。他还经常向蒙哥马利 (Deane Montgomery)、莫尔斯 (Marston Morse)、惠特尼 (Hassler Whitney) 等大师讨教。福克斯 (Ralph Fox) 是围棋的高手，斯梅尔却常去要求让目对弈，并且与福克斯的研究生纽沃思 (Loe Neuwirth) 和斯塔林斯 (John Stallings) 混得很熟，他们后来也成了有影响的数学家。

1958 年夏天，通过利马的介绍，斯梅尔结识了佩肖托 (Mauricio Peixoto)，这激起斯梅尔对结构稳定性的兴



1968 年时的斯梅尔

趣，这种兴趣一直在发展，导致后来他应佩肖托的邀请到巴西的里约热内卢纯粹数学和应用数学研究所度过那两年资助的最后 6 个月。

巴西海滨终结晶

1960 年元旦刚过，斯梅尔携夫人克拉拉及两个孩子来到巴西的里约热内卢。当时，一位空军上校刚因策划政变失败而逃离巴西到阿根廷避难，斯梅尔一家就租用了上校原住的公寓，并且留用了上校的两个女仆。这是一套有十一个房间的豪华住所，周围景色迷人。要知道，那时候美元在巴西十分坚挺。

从公寓出发走几分钟，就是巴西著名的柯帕尔巴那海滩。每天上午，斯梅尔都带着纸和笔到洁白的海滩上去。这样既可以游泳，又可以考虑数学问题。下午，他通常到研究所去，与佩肖托讨论微分方程，与利马讨论拓扑学问题。

取得博士学位以来，斯梅尔的数学兴趣一直集中在动力系统理论上。著名的斯梅尔马蹄变换，就是这个时候的成果。就在继续进行梯度动力系统研究的过程中，斯梅尔注意到动力系统揭示了将流形分解为胞腔的崭新思想，运用这种分解来攻克庞加莱猜测的设想便油然而生，从此他就兴奋在这个问题上。

很快，斯梅尔感到当维数大于 4 时，这个想法是行得通的。吸取以往的教训，这次他没有急于写出论文。他非常小心地把自己的证明想了又想，后来又和利马一步一步进行仔细的论证。当获得足够的信心以后，他写信给仍在普林斯顿的赫希，并且向当代拓扑学大师艾伦伯格 (Sammy Eilenberg) 通报了研究成果。

1960 年 6 月，斯梅尔按原定计划离开里约热内卢三个星期，到欧洲参加两个学术会议。他向会议提交了这个



斯梅尔 2010年摄于北京大学

研究成果。确实，有影响的学术会议，是使重要的成果为学界认识的最好机会。

斯梅尔的思想可以形象地叙述如下：

考虑赋以黎曼度量的 n 维流形 M 和 M 上的一个函数 $f: M \rightarrow R$ 。按照微分方程

$$\frac{dx}{dt} = -\text{grad} f$$

在 M 上确定一个动力系统。如果 $p \in M$ 是 f 的非退化临界点，那么在该动力系统当 $t \rightarrow \infty$ 时趋于 p 的所有点的集合 $W^s(p)$ 是一个嵌入胞腔，当 $t \rightarrow -\infty$ 时趋于 p 的所有点的集合 $W^u(p)$ 也是一个嵌入胞腔。在 $n = 2$ 的情形，我们可以设想像一条倒过来的裤子那样的一个曲面（流形），如果曲面上涂了蜜糖，那么蜜糖因为重力的流动，就可以代表曲面上的一个动力系统。这时候，设 p 是那条倒过来的裤子从上面看下去的鞍点，而 A 是左裤管上的一个点，经过这个点的蜜糖流向 p ， B 是右裤管上的一个点，经过这个点的蜜糖也流向 p ，那么按照蜜糖流动的 ApB 弧，就是 $W^s(p)$ ，类似理解的 CpD 弧，其中 C 和 D 都在倒过来的这条裤子的裤腰上，就是 $W^u(p)$ 。在 $n = 2$ 的情形， $W^s(p)$ 和 $W^u(p)$ 都是一维胞腔。

对于 f 的每个非退化临界点 p ， $W^s(p)$ 称为动力系统 $-\text{grad} f$ 的稳定流形，而 $W^u(p)$ 称为动力系统 $-\text{grad} f$ 的

非稳定流形。只要 p 是 f 的非退化临界点，那么 $W^s(p)$ 和 $W^u(p)$ 就横截相交，从而排除了相切的可能。

由于横截相交，临界点的稳定流形给出 M 的一个分解，并且每个胞腔的边界都是若干低维胞腔之并。在这样分解以后，再利用添加环柄的消去方法，在维数 $n \geq 5$ 和 M 具有 n 维球的伦型的假设之下，最终就得到一个 n 维球。这就证明了 $n \geq 5$ 时庞加莱猜测成立。

苏京盛会受菲奖

1966年5月，斯梅尔从他任职的美国加州伯克利大学到达巴黎，邀请者是在1950年第十一届世界数学家大会上获菲尔兹奖的施瓦兹（Laurent Schwartz）教授，以广义函数论的研究著称。随后，斯梅尔与突变理论创始人、在1958年第十三届世界数学家大会上获菲尔兹奖的托姆一起，开车去日内瓦参加一个学术会议。克拉拉和两个孩子也将在日内瓦与他会合。

斯梅尔当然知道庞加莱猜测的分量，所以，当1962年在斯德哥尔摩举行的第十四届世界数学家大会没有授予他菲尔兹奖时，他曾经非常失望。这使他怀疑菲尔兹奖的价值，认为菲尔兹奖委员会的评选方针有问题。由于上次失望，1966年他已不那么关注自己是否会获奖了。然而，当托姆在开车前往日内瓦的途中透露斯梅尔将在8月于莫斯科召开的第十五届大会上获得菲尔兹奖时，斯梅尔感到有点几意外，因而十分激动。托姆是菲尔兹奖评奖委员会的成员。几天以后，拓扑学家德拉姆（Georges de Rham）把这个消息正式通知了斯梅尔。

在日内瓦的日子很有意思。一方面有相当丰富的学术活动，看到许多老朋友；另一方面有阿尔卑斯山的胜景，使斯梅尔一家目不暇接。不管是否获奖，斯梅尔原已计划去莫斯科，因为先期他已被邀请作一小时的大会报告。大会前的时光，他和克拉拉携子女在欧洲度假。他们开车从日内瓦经南斯拉夫到希腊，一路上常常支帐篷露宿。希腊有那么多海滩和名胜古迹。他们商定，当斯梅尔去莫斯科时，家庭其他成员就留在希腊。

与家庭分手以后，在雅典机场，斯梅尔回忆着在希腊度过的美好时光，又想到明天就要在数以千计的数学家面前荣获数学界的最高奖，心情难免有点激动。

当一个海关官员示意斯梅尔停下来时，他还是无所谓，因为他知道护照和签证都没有问题。后来，他才慢慢明白过来，当他们全家开车进入希腊时，海关在他的护照上做了带车入境的记录，所以现在希腊海关不许他不带车子离境。克拉拉已经开着车子跑远了，而海关官员又不肯通融，斯梅尔只好眼睁睁地看着原定航班的

飞机起飞。要知道，那是每天只有一班的飞机。斯梅尔沮丧到了极点，因为按时出席大会的计划已经化为泡影！

这时，美国大使馆已经下班。经过一番紧张的联络和交涉，斯梅尔得到一位好心的大使馆官员的帮助。这位官员同情他的申述，不顾大使馆的惯例，给希腊海关写了一封信，请求放行斯梅尔，并且保证倘若在8月底以前斯梅尔不和他的车子一起重新出现在希腊，大使馆将承担一切责任。

这样，斯梅尔才得以在大会开幕的当天，乘上另一班从雅典经停布达佩斯到莫斯科的班机。在布达佩斯上机的一位相识的匈牙利数学家告诉他，报纸上说非美活动委员会已发出传票要他到国会听证会上接受质询。

一到莫斯科，他就径直赶去克里姆林宫。但是因为尚未办理报到手续，卫兵不让他进去。最后，他认识的一位苏联数学家帮助了他。当他进入会议大厅并在后排坐下时，开幕式早已开始，托姆教授正在用法语向大会介绍斯梅尔及他的卓越工作，这时，数学家们才发现，斯梅尔已经和他们在一起。

贡献数理经济学

20世纪60年代末期，斯梅尔开始涉足数理经济学。他在《数理经济学杂志》等刊物上，发表了价格调整的动力学等一系列论文；80年代由诺贝尔经济学奖获得者及相应水平的学者编撰的三大卷的《数理经济学手册》，有斯梅尔的一章“大范围分析和经济学”。1983年度诺贝尔经济学奖获得者德布鲁（Gérard Debreu）在他的获奖演讲中明确指出，正是斯梅尔1968年向他介绍的萨德定理（Sard's Theorem），在1970年促成了他的主要理论的结晶。在当代科学的前沿发展中，这是值得大书一笔的学科交互渗透相得益彰的范例。

斯梅尔和德布鲁的首次见面，是在1968年。那时，他们都已经身在伯克利，斯梅尔是数学系教授，德布鲁是经济学系教授。一天，德布鲁为了自己的经济学研究，走到斯梅尔的办公室向他请教数学问题。从法国移居美国的德布鲁，曾经受过布尔巴基学派的严格训练，数学基础扎实，而斯梅尔又是一个学术思想非常活跃、研究兴趣相当广泛的学者，所以他们之间很快就可以相互理解地讨论数学定理和经济学问题了。事实上，德布鲁提出的问题，正是斯梅尔研究数理经济学的开端。在后来的日子里，他们经常长时间地进行讨论，这也往往是他们一起外出游玩的真正目的。这样合作下来，在1975年德布鲁成了数学系的兼职教授，而1976年，斯梅尔也在经济学系取得了同样的位置。



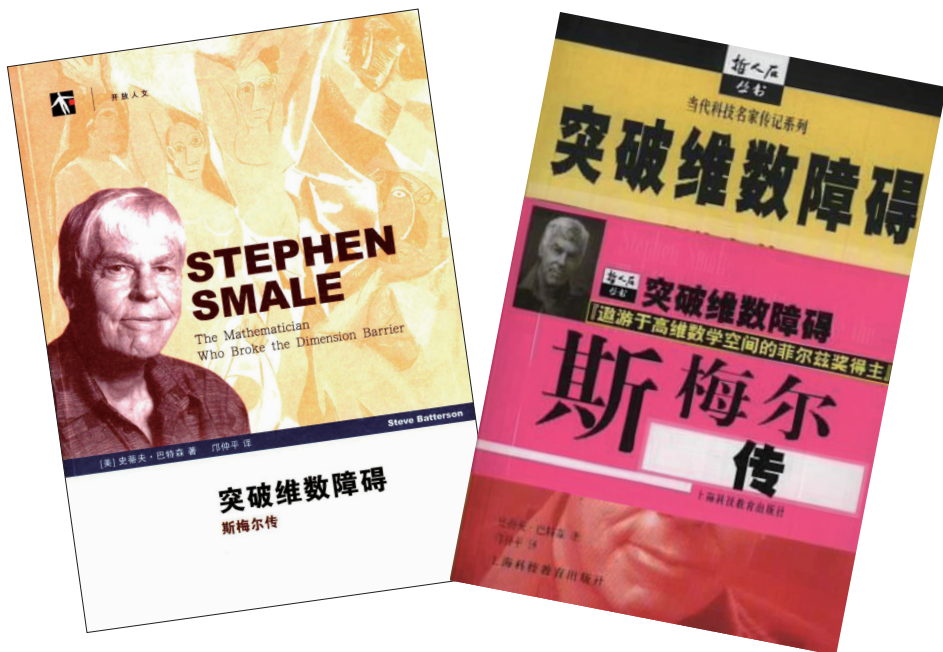
斯梅尔（左）和斯梅尔奖得主克里斯蒂安森（Snorre H. Christiansen）2011年摄于布达佩斯

英国古典经济学派的创始人亚当·斯密在1776年的名著《国富论》中写道，在自由经济的条件下，每个人追求的是个人的利益，但有一只“看不见的手”引导他去促进社会的利益。100年以后，洛桑学派的创始人瓦尔拉斯（Leon Walras）在1874年的《纯粹政治经济学原理》中，把斯密的说法提炼为经济均衡的概念：他把“看不见的手”解释为市场的价格调节机制，把“社会利益”解释为供求均衡，考虑在各方都追求私利的条件下，是否存在一组合适的所谓均衡价格，使得由此决定的市场供给和市场需求正好相等。又过了半个世纪，沃尔德（Abraham Wald）使斯密-瓦尔拉斯的思想得到严格的数学陈述。从此，如何严格证明均衡价格的存在性，成了数理经济学的中心问题。

诺贝尔经济学奖获得者萨缪尔森、希克斯、阿罗和库普曼都对这一问题作出过贡献，而德布鲁受到纳什（John Nash）先前证明有限博弈必定存在纳什均衡的启发，首次令人满意地证明了一般经济均衡理论中均衡价格的存在性，他用的是凸分析和布劳威尔不动点定理。

如果均衡是唯一的，有关经济模式对均衡的阐述就完整了。但是到20世纪60年代后期已经清楚，整体唯一性的要求太高，局部唯一性将足以使人满意。在获奖演说中，关于局部唯一性的条件，德布鲁是这样说的：

“正如我在1970年所做的那样，可以证明，在适当的条件下，在所有经济的集合中，没有局部唯一均衡的经济集合是可以忽略不计的。这句话的确切含义及证明这个断言的基本数学结果，可以在萨德定理中找到，这个定



斯梅尔的传记

理是斯梅尔在 1968 年夏天的交谈中向我介绍的。整个讨论的各个部分最后是在新西兰南岛的米尔福海湾完成的。1969 年 7 月 9 日下午，当我和妻子弗朗索瓦抵达那里的时候，遇上天阴下雨的坏天气。这迫使我回到房间里工作，继续研究困扰我多时的课题。而这次，观念竟很快结晶。第二天早上，晴空蓝天在海湾明媚的仲冬展现。”

萨德定理说，如果 $f: M \rightarrow N$ 是微分流形之间的光滑映射，则 N 的几乎每一点都是 f 的正则值。换句话说， f 的临界值在 N 中只是一个零测集。萨德定理其实是说，在适当的光滑性条件下，正则现象是通有的 (generic)，其几率为 1，而临界现象的几率为 0，常常可以忽略不计。的确，德布鲁就是借此定义了正则经济和临界经济。正则经济具有满测度；从而对正则经济业已建立的均衡集及其稳定性的结论，是合理的经济分析。

斯梅尔本身的经济学研究，见诸他已发表的许多论文，笔者等在别的地方的介绍文章亦可一阅。当得知德布鲁如所预料获奖时，斯梅尔写了一篇短文，在一页半的篇幅里精辟地介绍了德布鲁的工作，给予了高度评价。但这并非捧场应景的文章，其结尾蕴含着深刻的分析：

“这并不意味着均衡理论就应该是社会的模式。首先，它假设没有垄断，但是在一个分散化的经济系统中，垄断总是要产生的。其次还有不公平。阿罗和德布鲁证明了，

当处于均衡配置时，没有人可以不损害别人就使自己更加受益。然而，理论本身却未排除社会产品的不公平分配。因此，政府对分散化的价格体系的有力调控，仍然需要。

特别重要的是，在阿罗-德布鲁的理论中，时间的进程没有得到充分的考虑。由于缺乏动力学的观点，他们的理论还不能很好地说明为什么价格体系要向均衡状态调整，为什么会停留在均衡状态。再一个有关的弱点是，他们的模式对经济主体人的行为理性化提出了不切实际的要求。要知道，即使配备了最新式的计算机，消费者和生产者也不可能作出该模式所要求的高度理性的决策。

尽管后面还有许多诱人的挑战，现在毕竟已经有了一个良好的框架。这就是两个世纪以来经济学家们奠定下来的基础，其中我们特别要提到斯密、瓦尔拉斯、沃尔德、阿罗和德布鲁。”

发表这篇文章的美国《数学信使》(Mathematical Intelligencer) 杂志，特别鼓励出自大师的小品或随笔，轶事牢骚，亦悉听作者之意。

创新计算复杂性理论

20 世纪 70、80 年代，斯梅尔的研究重点是计算复杂性理论，主要是数值方法的计算复杂性理论。1981 年，他发表论文证明，概率地说来，用牛顿方法为 n 阶多项式