ABC 猜想浅说

卢昌海

由前三个英文字母拼合而成的“ABC”一词据说自 13 世纪起便见诸文献了，含义为“入门”。这些年随着英文在中国的流行，该词在中文世界里也夺得了一席之地，出现在了很多图书的书名中，大有跟中文词“入门”一较高下之势。不过，倘若你在数学文献中看到一个以“ABC”命名的猜想——“ABC 猜想”(ABC conjecture)，千万不要以为那是一个入门级别的猜想。事实上，这一猜想在公众知名度方面或许尚处于“入门”阶段，以难度和地位而论却绝不是入门级别的。

在本文中，我们将对这一并非“入门”级别的猜想做一个“入门”级别的介绍。

一．什么是 ABC 猜想？

在介绍之前，让我们先回忆一下中小学数学中的两个简单概念。其中第一个概念是素数（prime number）。我们知道，很多正整数可以分解为其它——即不同于它自己的——正整数的乘积，比如 $9 = 3\times3$，$231 = 3\times7\times11$，等等。但也有一些正整数不能这么分解，比如 13，29 等。这后一类正整数——1 除外——就是所谓的素数。素数是一个被称为“数论”（number theory）的数学分支中的核心概念，其地位常被比喻为物理学中的原子（atom），因为与物理学中物质可以分解为原子相类似，数学中所有大于 1 的正整数都可以分解为素数的乘积（素数本身被视为是自己的分解）。不仅如此，这样的分解还可以被证明是唯一的，这被称为算术基本定理（fundamental theorem of arithmetic）。第二个概念则是互素（co-prime）。两个正整数如果其素数分解中不存在共同的素数，就称为是互素的，比如 $21 = 3\times7$ 和 $55 = 5\times11$ 就是互素的。对这一定义还有一个小小的补充，即 1 被定义为与所有正整数都互素。

有了这两个简单概念，我们就可以介绍 ABC 猜想了。ABC 猜想针对的是满足两个简单条件的正整数组（A, B, C）[1]。其中第一个条件是 A 和 B 互素，第二个条件是 $A + B = C$。显然，满足这种条件的正整数组有无穷多个（请读者自行证明），比如（3, 8, 11)，(16, 17, 33)……。为了引出 ABC 猜想，让我们以(3, 8, 11)为例，做一个“三步走”

[1] 为了简单起见，我们的介绍是针对正整数的，但 ABC 猜想其实也可以针对整数进行表述，两者并无实质差别。我们将后者留给感兴趣的读者去做。

的简单计算：

1. 将 A、B、C 乘起来 (结果是 $3\times8\times11=264$)；
2. 对乘积进行素数分解 (结果是 $264=2^3\times3\times11$)；
3. 将素数分解中所有不同的素数乘起来 (结果是 $2\times3\times11=66$)。

现在，让我们将 A、B、C 三个数字中较大的那个（即 C）与步骤 3 的结果比较一下。我们发现后者大于前者（因为后者为 66，前者为 11）。读者可以对上面所举的另一个例子——即（16, 17, 33）——也试一下，你会发现同样的结果。如果随便找一些其它例子，你也很可能发现同样的结果。

但你若因此以为这是规律，那就完全错了，因为它不仅不是规律，而且有无穷多的反例。 比如（3, 125, 128）就是一个反例（请读者自行验证）。但是，数学家们猜测，如果把步骤 3 的结果放大成它的一个大于 1 的幂，那个幂哪怕只比 1 大上一丁点儿（比如 1.00000000001），情况就有可能大不一样。这时它虽仍未必保证能够大于三个数字中较大的那个（即 C），但反例的数目将由无穷变为有限。这个猜测就是所谓的 ABC 猜想[2]，它是由英国数学家麦瑟尔（David Masser）和法国数学家厄斯特勒（Joseph Oesterlé）于 20 世纪 80 年代中期彼此独立地提出的。“ABC”这个毫无创意的名字——大家可能猜到了——则是来自把猜想中涉及到的三个数字称为 A、B、C 的做法，而非“入门”之意。

与数学猜想大家庭中的著名成员，如黎曼猜想、哥德巴赫猜想、孪生素数猜想，以及（已被证明了的）曾经的费马猜想、四色猜想等等相比，ABC 猜想的“资历”是很浅的（其它那些猜想都是百岁以上的“老前辈”），公众知名度也颇有不及，但以重要性而论，则除黎曼猜想外，上述其它几个猜想都得退居其后。

二 . ABC 猜想为什么重要？

ABC 猜想有一个在普通人看来并不奥妙的特点，就是将整数的加法性质（比如 $A+B=C$）和乘法性质（比如素数概念——因为它是由乘法性质所定义的）交互在了一起。不过，数学家们早就知道，由这两种本身很简单的性质交互所能产生的复杂性是近乎无穷的。数论中许多表述极为浅显，却极难证明的猜想，比如前面提到的哥德巴赫猜想、孪生素数猜想、费马猜想等都具有这种加法性质和乘法性质相交互的特性。数论中一个很重要的分支——旨在研究整系数代数方程的整数解的所谓丢番图分析（Diophantine analysis）——更是整个分支都具有这一特性。丢番图分析的困难性是颇为出名的，著名德国数学家希尔伯特曾乐观地希望能找到其“一揽子”的解决方案，可惜这个被称为希尔伯特第十问题的希望后来落了空，被证明是不可能实现的。与希尔伯特的乐观相反，美国哥伦比亚大学的数学家戈德菲尔德（Dorian Goldfeld）曾将丢番图分析比喻为飞蝇钓（fly-fishing）——那是发源于英国贵族的一种特殊的钓鱼手法，用甩出去的诱饵模

[2] 这里略作一点补充：步骤 3 的结果因不含任何素数因子的平方，被称为 A、B、C 三个数字乘积的“无平方部分”(square-free part)，简记为 sqp(ABC)——不过要注意的是，这一记号在某些文献中有不同含义，与本文含义相一致的另一种记号为 rad(ABC)。用这一记号，ABC 猜想可以表述为“对任意给定的 $n>1$，只有有限多组 (A, B, C) 满足 $\mathrm{sqp}(ABC)^n<C$”（当然，别忘了 A 和 B 互素及 $A+B=C$ 这两个条件）。这一表述通常见诸科普介绍， 在专业文献中 ABC 猜想往往被表述为 “对任意给定的 $n>1$，$\mathrm{sqp}(ABC)^n/C$ 的下界大于零”。感兴趣的读者不妨由“科普表述”出发，证明一下“专业表述”，不过要提醒读者的是：相反方向的证明，即由 “专业表述” 证明“科普表述”， 并不是轻而易举的。另外要说明的是，正文提到的所谓 ABC 猜想所允许的“反例”乃是“科普表述”特有的提法，意指满足 $\mathrm{sqp}(ABC)^n<C$ 的那有限多组 (A, B, C)。在“专业表述”中是没有所谓“反例”的提法的。

拟飞蝇等昆虫的飞行姿态，以吸引凶猛的掠食性鱼类。飞蝇钓的特点是技巧高、难度大、成功率低，而且只能一条一条慢慢地钓——象征着丢番图分析只能一个问题一个问题慢慢地啃，而无法像希尔伯特所希望的那样“一揽子”地解决掉。

但是，与交互了加法性质和乘法性质的其它猜想或问题不同的是，ABC 猜想这个从表述上看颇有些拖泥带水（因为允许反例）的猜想似乎处于某种中枢地位，它的解决将直接导致一大类其它猜想或问题的解决。拿丢番图分析来说，戈德菲尔德就表示，假如 ABC 猜想能被证明，丢番图分析将由飞蝇钓变为最强力——乃至野蛮——的炸药捕鱼，一炸就是一大片，因为 ABC 猜想能“将无穷多个丢番图方程转变为单一数学命题”。这其中最引人注目的“战利品”将是曾作为猜想存在了 300 多年，一度被《吉尼斯世界纪录》称为“最困难数学问题”的费马猜想。 这个直到 1995 年才被英国数学家怀尔斯（Andrew Wiles）以超过 100 页的长篇论文所解决的猜想在 ABC 猜想成立的前提下，将只需不到一页的数学推理就能确立[3]。其它很多长期悬而未决的数学猜想或问题也将被“一锅端”。这种与其它数学命题之间的紧密联系是衡量一个数学命题重要性的首要“考评”指标，ABC 猜想在这方面无疑能得高分——或者用戈德菲尔德的话说，是“丢番图分析中最重要的未解决问题”，“是一种美丽”。

ABC 猜想的重要性吸引了很多数学家的兴趣，但它的艰深迟滞了取得进展的步伐。截至 2001 年，数学家们在这一猜想上取得的最好结果乃是将上述步骤 3 的结果放大成它的某种指数函数。具体地说，截至 2001 年，这方面的最好结果是

$$exp[K \cdot \mathrm{sqp}(\mathrm{ABC})^{1/3+\varepsilon}]/\mathrm{C} > 1,$$

其中 K 是与 ε 有关（但与 A、B、C 无关）的常数。由于指数函数的大范围增长速度远比幂函数快得多，由它来保证其大于 A、B、C 三个数字中较大的那个（即 C）当然要容易得多（相应地，命题本身则要弱得多）。

除上述理论结果外，自 2006 年起，由荷兰莱顿大学（Leiden University）的数学系牵头，一些数学和计算机爱好者建立了一个名为 ABC@Home 的分布式计算（distributed computing）系统，用以寻找 ABC 猜想所允许的反例。截至 2014 年 4 月，

[3] 这个关于在 ABC 猜想成立的前提下，费马猜想将只需“不到一页的数学推理就能确立”(establishing in less than a page of mathematical reasoning) 的不无夸张的说法出自美国数学协会 (Mathematical Association of America) 的出版主管、著名美国数学科普作家彼得森 (Ivars Peterson)。不过，该说法虽然夸张，却并非完全“忽悠”。为了说明这一点，并作为对如何由 ABC 猜想证明其它命题的演示，我们在这里介绍一个“不到一页的数学推理”：假设费马猜想不成立，即存在互素的（这点请读者自行证明）正整数 x、y、z 使得

$$x^k + y^k = z^k \qquad (k > 2).$$

则由 [注 2] 给出的 ABC 猜想的“专业表述”可知（取 $n = 7/6$）：

$$\mathrm{sqp}(x^k y^k z^k)^{7/6}/z^k > \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0).$$

由于 $\mathrm{sqp}(x^k y^k z^k) = \mathrm{sqp}(xyz) \le xyz < z^3$，因此 $z^{3.5-k} > \varepsilon$。显然，对所有 $k \ge 4$，只有小于（由 ε 决定的）某个数值的有限多个 z 能满足该不等式，而且当 k 大于（由 ε 决定的）某个数值后，将不会有任何 z 满足该不等式。这表明，对所有 $k \ge 4$，费马猜想的反例即便有也只能有有限多个，而且 k 大到一定程度后将不再有反例。因此，证明费马猜想就变成了证明 $k = 3$ 的情形（这在两百多年前就已完成），以及通过数值验证排除总数有限的反例。这虽然并非“不到一页的数学推理”就能确立的，比起怀尔斯的证明来毕竟是直截了当多了。倘若历史走的是不同的路径，费马是在 ABC 猜想被证明之后才提出的费马猜想，他那句戏剧性的“我发现了一个真正出色的证明，可惜页边太窄写不下来”倒是不无成立之可能。