

# 张益唐 和 北大数学 78 级



谨以此文纪念陈景润诞辰 80 周年；他影响了那个难忘的时代

汤涛

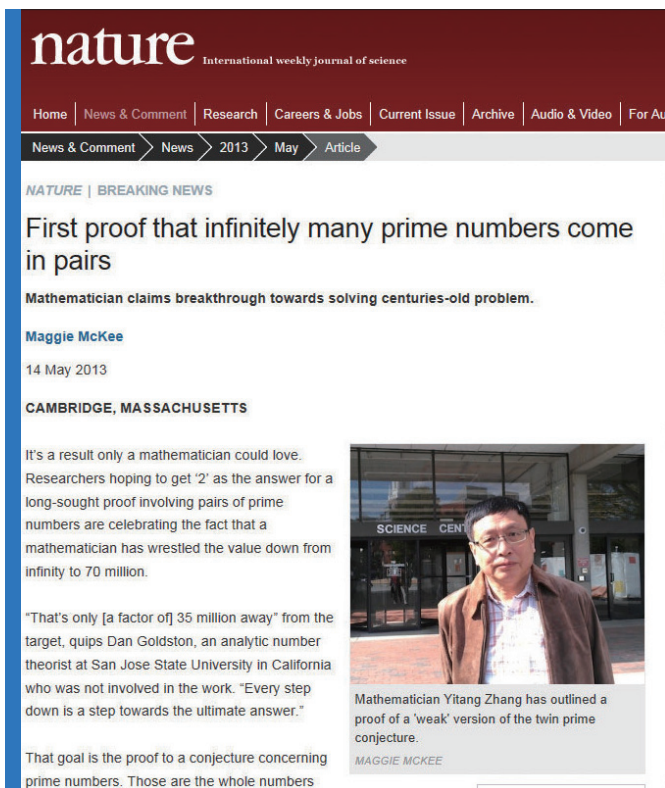
2013 年是北京大学数学系成立 100 周年。百年大庆，作为校友，总觉得应该写点什么作为纪念。

1904 年，清政府颁布的《钦定学堂章程》规定“高等算学”隶属格致科（现在称理科），并且规定了算学门的课程。辛亥革命后，京师大学堂于 1912 年 5 月 1 日改名为国立北京大学。同年公布的“民国元年所订之大学学制及其学科”中格致科改名为理科，其中包括数学门。1913 年秋，北京大学数学门招收新生，标志着中国现代第一个大学数学系正式开始教学活动。北大数学的早期学生张国焘因为后期的政治生涯为数学系增添了些许另类传奇。

北大数学的一百年培养了大量的人才，先后培养出 6000 多名本科生，1000 多名硕士、博士毕业生，一大批优秀的数学家和其他方面的专家。他们分布在各行业，许多人成绩斐然，得到了社会各界的高度评价。其中有 30 余位毕业生被选为中国科学院院士。著名数学家江泽涵、许宝騄、段学复、程民德等都是数学系重量级的前辈，获得国家最高科技奖的吴文俊院士、王选院士也任教或毕业于北大数学系。特别值得一提的是，由哈佛大学和麻省理工学院联合举办的 2013 年度“数学发展前沿”（Current Developments in Mathematics）研讨会上，六位主旨发言的数学家中北大数学毕业生就占了三位：2000 级的恽之玮和张伟、1978 级的张益唐。另外三位包括菲尔兹奖得主、著名数学家爱德华·威滕（Edward Witten）。

北大数学的辉煌历史，不是我这样一个晚辈敢写的，也不可能写得好。但是为了表达对院庆的祝贺，我就写一个跟我稍稍沾点边的文革后北大数学第一届学生的故事吧。

## 张益唐与李生素数



《自然》5月14日的报道

北大数学系张益唐沉默 20 多年，几天前突然横空出世，为世纪难题李生素数猜想的解决做出了突破性的工作。为此，顶级科学杂志《自然》在“突破性新闻”栏目里，报道了张益唐证明了存在无穷多个差值小于 7 千万的素数对，从而在解决李生素数猜想这一百年数论难题的道路上前进了一大步。

为了认识李生素数猜想，让我们先做一些简单铺垫。先谈谈素数。素数是数学中美妙的音乐，美丽的女神，有着很多让人捉摸不透的秘密。传说大数学家欧拉说过：“一直以来，数学家总是在孜孜不倦地寻找素数规律，但是很难成功。我们可以把素数看作人类思维无法渗透的奥秘。”

远在中古时代，就产生了自然数的概念，印度人对数学最大的贡献之一就是引进了符

号“1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0”来计数。正是由于有了数的合理记法，对于数的研究才能够代代相传。比零大的正整数统称为自然数，它们共有三类：即 1（民间常说的大佬，无人敢与其争锋）；素数（素数也叫质数，只能被 1 和自身整除的数，比如 5, 7, 11, 19 等）；合数（可以被 1 和自身以外的某个自然数整除的数，如 9, 16, 20）。

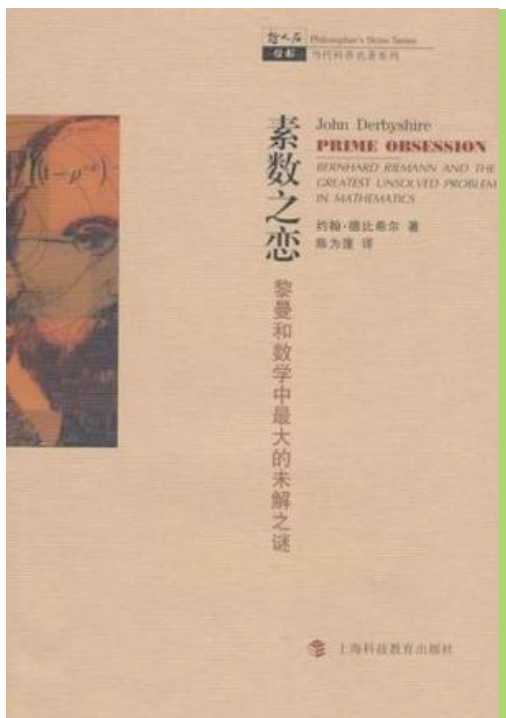
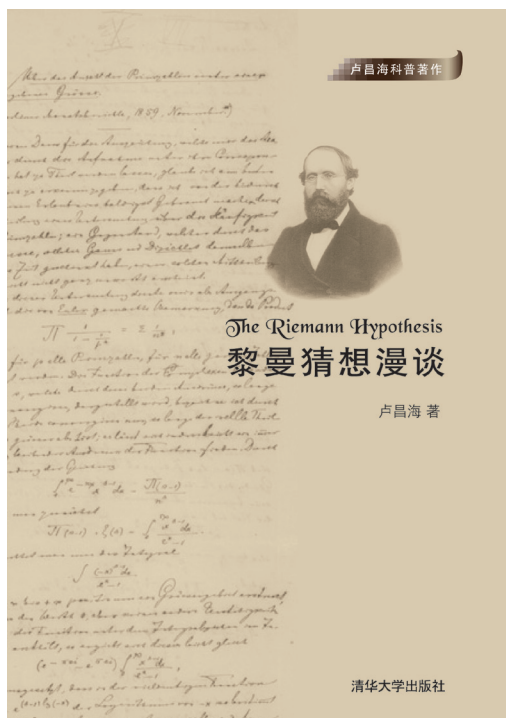
有了自然数的概念以后，很快就有了一个古老的数学分支：数论。它是纯粹数学的分支之一，主要研究自然数的性质。数论在很长一段时间里被称为算术，直到 20 世纪初才开始使用数论的名称。数论的早期铺垫有三大内容：欧几里得证明素数有无穷多个；寻找素数的过筛方法以及欧几里得求最大公约数的辗转相除法；公元 420 至 589 年（中国南北朝时期）的孙子定理。

欧几里得用漂亮的反证法证明了素数的个数有无穷多个。记得我在 80 年代初选修了石孙的初等数论课时，被他完美的讲课风格和欧几里得伟大的证明所折服，在当时的老二教的上课时光现在还历历在目。

素数在自然数中的分布很奇妙；从公元前三世纪开始至今，吸引了众多数学家的不懈努力。公元前三世纪古希腊数学家、哲学家埃拉托色尼（Eratosthenes, 公元前 275 - 前 193）为了研究这个问题，提出了一个叫“过筛”的方法（the Sieve of Eratosthenes）简称埃氏筛法，造出了世界上第一张素数表，就是按照素数大小排成的表。比方说把一张超大的纸放在沙滩上，然后把自然数按其大小一个写上去；然后按下列法则把合数挖掉：

- (1) 先把 1 删除（因为 1 不是质数）
- (2) 把 2 留下（最小的偶数质数），然后把 2 的倍数删去
- (3) 把 3 留下，然后把 3 的倍数删去
- (4) 把 5 留下，然后把 5 的倍数删去
- (5) 同理继续进行下去，直到把所有数要么留下，要么删除





这样如果纸上最大的数是  $N$ ，则上述方法可以产生  $N$  以内素数的分布表。

从这个古典的方法中人们可以观察到，素数的分布随着  $N$  的变大，变得越来越稀疏。比如 1 到 10 之间有 2, 3, 5, 7 四个素数；100 之内有 25 个素数，1000 之内有 168 个素数，100 万之内有 78498 个素数。大量数值试验显示，当  $N$  变得很大时，在 1 到  $N$  之间素数的个数和  $N$  的比值变得很小。那么严格的数学刻画是什么呢？

用  $\pi(N)$  表示不大于自然数  $N$  的素数的个数，如  $\pi(2) = 1$ ， $\pi(3) = 2$ ， $\pi(10) = 4$ 。法国大数学家勒让德 (Legendre, 1752-1833) 于 1808 年建议当  $N$  非常大时：

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\ln N + B},$$

其中  $B = -1.08366$  被称为勒让德常数。可惜这个公式在相应的级数展开式中仅第一项正确。1792 年，当数学王子高斯刚满 15 岁时，就猜测当  $N$  非常大时， $\pi(N)$  和  $N/\ln(N)$  差不多大；更确切地说，当  $N$  充分大时，

$\pi(N)$  和  $N/\ln(N)$  之比接近于 1。用极限的语言来说就是

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi(N)}{\frac{N}{\ln(N)}} = 1.$$

这个猜想被叫做素数定理。1850 年，俄罗斯数学先驱切比雪夫证明：存在两个正数  $a$  和  $b$ ，使不等式

$$a \leq \frac{\pi(N)}{\frac{N}{\ln(N)}} \leq b$$

成立，其中  $N \geq 2$ 。这为证明高斯的素数定理迈进了一大步；并且切比雪夫在证明中用到了微积分。

革命性的变化发生在 1859 年。1859 年 8 月，时年 32 岁的数学家黎曼 (G. F. B. Riemann) 向柏林科学院提交了一篇 8 页纸的论文，题为“论不超过一个给定值的素数的个数”。在这篇论文中，他把素数个数和所谓的  $\zeta$  函数建立了联系，这一联系推动了解析数论的发展；文章中提出的黎曼猜想给数学家们带来了比素数分布更大的挑战。时至



今日，在经历了 150 多年的认真研究和极力探索后，这个猜想仍然悬而未决。关于黎曼猜想的最权威的科普文章，可以见科普高手卢昌海的《黎曼猜想漫谈》（见本期的书评）。

卢昌海的大作从 2010 年底在《数学文化》上连载。科学院的王元院士看后非常欣赏。有幸和元老在海淀区知春路上的一个西餐馆吃过一顿饭；其间他对卢昌海的文笔以及卢对黎曼猜想的深刻理解赞不绝口：“一个学物理的能把一个这么艰深的数学问题写得如此透彻，真是太不容易了。”之后卢昌海要把文章集结成书时，叫我代请元老写序。一周后，我收到老院士亲笔写的 10 页纸的手稿。

美国作家约翰·德比希尔 (John Derbyshire) 根据黎曼猜想的提出和可能的应用，写出了畅销书《素数之恋——伯恩哈德·黎曼和数学中最大的未解之谜》。在这本《素数之恋》中，作者用明晰的笔法，对一个史诗般的数学之谜作了迷人而流畅的叙述，再次展示了素数的魅力。

虽然黎曼没有给出关于  $\pi(N)$  的具体结果，但他为在黑暗里奋斗的素数分布研究指明了方向。正是沿着这个方向，1896 年，法国数学家阿达玛 (J. S. Hadamard) 和比利时数学家普桑 (Charles Jean de la Vallée Poussin) 几乎同时独立地证明了素数定理。差不多半个多世纪后的 1949 年，塞尔伯格 (Atle Selberg) 和爱多士 (Paul Erdős) 给出了素数定理的初等证明。前者因此工作以及对筛法的改进获得了 1950 年的菲尔兹奖。

现在回到孪生素数。孪生素数指差为 2 的素数对。前几对孪生素数分别是 (3, 5)，

(5, 7)，(11, 13)，(17, 19)，(29, 31)，(41, 43)，(59, 61) 等。一般来说，如果  $p$  和  $p + 2$  都是素数，则  $(p, p + 2)$  就叫做孪生素数。100 以内有 8 对孪生素数；501 到 600 间只有 (521, 523) 和 (569, 571) 两对。更大的孪生素数还有，如 (5971847, 5971849)。不过，可以观察到孪生素数的分布也是极不均匀的，并且也是越来越稀疏，与素数的分布相比，还要稀疏得多。

这样问题就来了：比如孪生素数的分布规律是什么？共有多少对孪生素数？或者说有没有一对最大的孪生素数？

于是人们又开始猜想了：有无数对孪生素数。但没有人确切地知道究竟有多少对。到 2009 年 8 月 6 日，已知最大的孪生素数为  $2003663613 \cdot 2^{195000} \pm 1$ ，这两个数都有 10 万多位。

上世纪最伟大的数学家大卫·希尔伯特 (David Hilbert) 在 1900 年国际数学家大会上提出了著名的 23 个重要数学难题和猜想，其中孪生素数问题是希尔伯特问题的第 8 个的一部分，可以这样描述：存在无穷多个素数  $p$ ，使得  $p$  与  $p + 2$  同为素数；而素数对  $(p, p + 2)$  称为孪生素数。数学家们相信这个猜想是成立的。1849 年，法国数学家波利尼亚克 (Alphonse de Polignac, 1817-1890) 提出了更一般的猜想：对所有自然数  $k$ ，存在无穷多个素数对  $(p, p + 2k)$ ；其中  $k = 1$  的情况就是孪生素数猜想。

2013 年 4 月，张益唐向《数学年刊》(Annals of Mathematics) 杂志提交了题为“素数间的有界距离” (Bounded gaps between primes) 的文章。《数学年刊》是研



究纯粹数学的学者们最敬仰的期刊，很多人一辈子能在上面发表几篇文章就可以奠定崇高的学术地位。要在这个刊物发表文章必须解决很难的问题，文章一般都很长，还要接受审稿人苛刻的甚至漫长的审稿过程。比如翻开此刊 2013 年的 177 卷，从提交文章到文章被接受，第一期的第一篇文章花了四年半，第二期的第一篇花了两年半，第三期的第一篇花了五年半。根据美国数学会 2012 年 11 月公布的统计资料，2011 年在《数学年刊》所发表的文章，从投稿到接受的平均时间为 24 个月。而张益唐的文章，2013 年 4 月 17 日交稿，5 月 21 日接受，这可能也是这一顶级期刊的一个纪录了。

另外，比较罕见的是这篇文章的审稿人也自报身份：此文的证明被著名的数论专家伊万尼克（Henryk Iwaniec）严格检查。波兰裔的美国数学家伊万尼克被公认为当今最顶级的解析数论专家。他对张益唐的工作赞不绝口：“结果太美了。”（His result is beautiful.）

张益唐的文章到底做了什么？他给出了和上面介绍的波利尼亚克猜想紧密相关的一个命题的证明。他证明了存在无数个素数对  $(p, q)$ ，其中每一对中的两个素数之差，即  $p$  和  $q$  的距离，不超过七千万。由此推出，存在无穷多个素数对  $(p, q)$ ，以及一个不超过七千万的正偶数  $h$ ，使得  $p - q = h$ 。

张益唐的文章基于加州圣荷西州立大学（San Jose State University）的戈德斯通（Daniel Goldston）小组于 2005 年发表的文章。一般来说，随着数的增大，素数间隙也越来越大；也就是前面说到的越来越稀疏。但戈德斯通的研究小组证明了，即使在很大的数中，仍然存在紧邻的素数。要直接把戈德斯通的方法应用于孪生素数问题却有本质的困难。这个困难被张益唐巧妙地克服了，他说他是去年夏天的 7 月 3 日在科罗拉多州朋友家的后院里聚会时突然开窍的。

张益唐 2013 年 5 月 13 日在哈佛展示了研究成果。他的证明看起来运用了一些常用的数学技巧，以至于有些人质疑他是否真的正确。但是《数学年刊》审稿人高度评价说：“这项研究是第一流的，作者成功证明了一个关于素数分布的里程碑式的定理。”（The

HOME PAGE TODAY'S PAPER VIDEO MOST POPULAR U.S. Edition ▼

The New York Times Science

WORLD U.S. N.Y. / REGION BUSINESS TECHNOLOGY SCIENCE HEALTH SPORTS OPINION ENVIRONMENT SPACE & COSMOS

Eden Park  
DISCOVER THE NEW SPRING-SUMMER 2013 COLLECTION - THE ELEMENTS - BY CLICKING HERE

### Solving a Riddle of Primes

By KENNETH CHANG  
Published: May 20, 2013

Three and five are prime numbers — that is, they are divisible only by 1 and by themselves. So are 5 and 7. And 11 and 13. And for each of these pairs of prime numbers, the difference is 2.

Connect With Us on Social Media  
@nytimescience on Twitter  
Science Reporters and Editors on Twitter

Like the science desk on Facebook.

Mathematicians have long believed that there are an infinite number of such pairs, called twin primes, meaning that there will always be a larger pair than the largest one found. This supposition, the so-called **Twin Prime Conjecture**, is not necessarily obvious. As numbers get larger, prime numbers become sparser among vast expanses of divisible numbers. Yet still — occasionally, rarely — two consecutive odd numbers will both be prime, the conjecture asserts.

The proof has been elusive.

But last month, a paper from a little-known mathematician arrived “out of the blue” at the journal *Annals of Mathematics*, said Peter Sarnak, a professor of mathematics at Princeton University and the Institute for Advanced Study and a former editor at the journal, which plans to publish it. The paper, by Yitang Zhang of the University of New Hampshire, does not prove that there are an infinite number of twin primes, but it does show an infinite number of prime pairs whose separation is less than a finite upper limit — 70 million, for now. (Dr. Zhang used 70 million in his proof — basically an arbitrary large number where his equations work.)

FACEBOOK  
TWITTER  
GOOGLE+  
SAVE  
E-MAIL  
SHARE  
PRINT  
REPRINTS  
THE WAY BACK WATCH TRAILER

《纽约时报》5月20日的报道

main results are of the first rank ; the author has succeeded to prove a landmark theorem in the distribution of prime numbers.)

戈德斯通说发现一个有限大的差距已经是巨大突破了：“我还以为我有生之年看不到这个结果呢。”

刚刚卸任《数学年刊》主编职务的普林斯顿大学教授彼得·萨纳克（Peter Sarnak）对《纽约时报》说，张益唐的观察很深邃（It's a deep insight）、结论很深刻（It's a deep result）。

英国《卫报》文章的正标题是：一个不知名教授的素数大突破，副标题是：鲜为人知的教授在折磨了数世纪数学精英的大问题上迈进了一大步。

数学界又掀起了一股素数热潮。《数学



英国《卫报》5月22日的报道

文化》特约作者欧阳顺湘在网上留言：“听说过小说《素数之恋》、《质数的孤独》什么的，不过我从没看过。不明白作者想用素数谈恋爱还是想说研究者喜欢质数？不过，人们发现素数已经变得更加不孤独了！”

质数是素数的另一个称呼。上面提到的



《质数的孤独》

《质数的孤独》是一部关于童年经验、爱与孤独的小说。小说的男女主人公就像两个孪生质数，彼此相近却永远无法靠近。《质数的孤独》出版以来，在意大利掀起了迷恋狂潮，书迷们甚至在城市各角落涂鸦书中佳句。该书表现人性的孤独极其有力，对于揭露造成这种孤独的原因也非常深刻。在销售方面，《质数的孤独》创造了意大利出版史上的处女作销售记录，小说在意大利销售超过100万册，在全欧洲更是售出500万册，在全球售出36个国家的版权。“恐怖”的是全书共有1907页——页码只能是质数——造成了这本300页左右的书有一个超大的总页数。

## 北大数学78级

### 人物之一：王鲁燕

我是1980年秋天入读北大数学系。恢复高考后，北大1977年没有招生（这一点很可惜，十年积攒的人才让复旦、中国科大等学校占了很大便宜）。为什么没有招生呢？

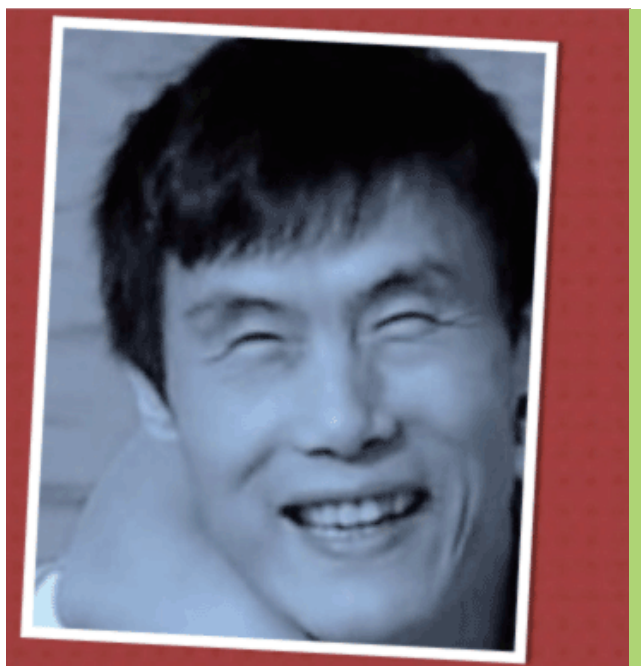
按当时的系主任丁石孙在他2007年的《自述年谱》所述：“（文革后的）1977年北大数学系还比较混乱，没有教材，由哪些老师上课也没有安排好，所以七七年就没有招生。”

因此当时 1978 级就是北大数学文革后恢复高考的第一批学生。他们那一届是典型的多年龄段学生混合体，班上最大学生应该是三十三、四岁，最小的十六、七岁吧，还有穿军装的，这些都是现在的大学生难以想象的。我们的班主任刘森老师就是 1978 级的学生，当时 30 几岁吧，是大学三年级的学生。由于他比较成熟严肃，干事情非常认真负责，我们这些比他晚两届的学弟很多见到他都非常害怕。2004 年我们大学毕业 20 年后重聚未名湖畔，很多人都小有成就了，见到刘老师还是毕恭毕敬，“心有余悸”。

78 级不只有成熟的学长，还有些学习上的高手，像考试成绩超好的周青、数学竞赛优胜者严勇、王鲁燕、陈刚。1978 年，在“科学的春天”到来之时，沉寂了十余年的数学竞赛得以恢复，各地的数学竞赛相继开始。数学竞赛优胜者是 1978 级北大数学的一个亮点。这年竞赛里有个小孩，通县一中的王鲁燕，他当时只是一个初二的学生，却在高中水平的数学竞赛中获得了全国第十五名的成绩；并且作为数学竞赛优胜者进了北大。1978 年 6 月 20 日的《光明日报》有下面的励志型的报道，今天读起来颇有“亲切感”：

数学竞赛第十五名王鲁燕是北京市通县一中初二学生，今年只有十四岁。在一年多以前，他是一个上课不听讲，下课爱打架的学生。调皮起哄，全校有名。粉碎“四人帮”之后，整个社会的风气变了，学校的风气变了，王鲁燕的“学不学都上学，会不会都毕业”的思想从根本上动摇了。恰在这个时候，王鲁燕转学到通县一中，模范教师刘纯朴是他的班主任。刘老师因势利导地对王鲁燕进行政治思想教育，又根据他爱动脑筋的长处，加强对他进行智育教育。仅仅一年多的时间，不仅把他培养成为“三好”学生，而且学完了高中数学课程，在数学竞赛中，取得了好成绩，引起了人们的极大注意。

王鲁燕在北大 78 级确是一大名。第一岁数小，第二长相可爱，细眯的眼睛绝对盖过孙红雷；第三严重偏科。数学尤其是纯数学的课学得极好，据说抽象代数课很多人都在及格的边缘徘徊，他可以得 100 分。那



王鲁燕

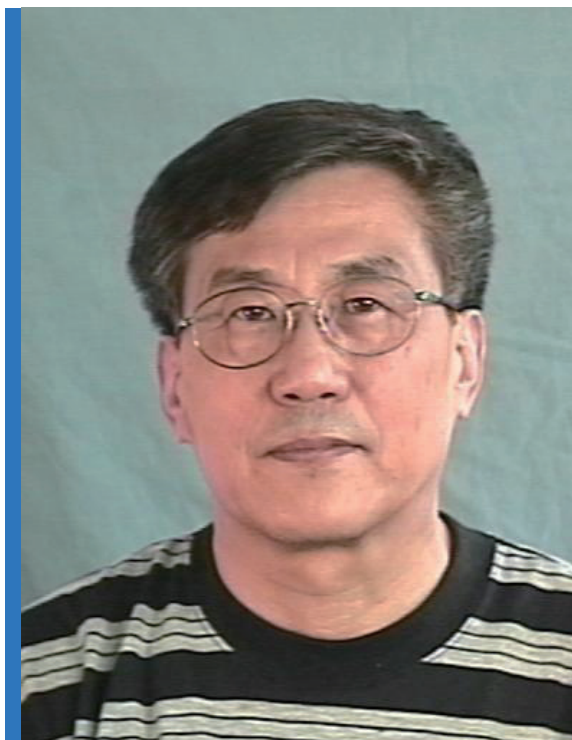
时给 78 级开课的老师可都是北大老师中的人精，著名数学家丁石孙、聂灵沼、张恭庆、姜伯驹、姜礼尚等都给 78 级上基础课。要在这些人手上拿高分可不是开玩笑的。但是王鲁燕的软肋是英语。一则逸事是他和另一个同学补考英语，他的成绩是 4 分，另一位是 15 分。老师根据成绩誉分，以为是 5 分制的 4 分，本来想给王鲁燕一个良；看到下面这个 15 分才觉得搞错了，两人都不及格。

由于王鲁燕英语长期过不了关，考研究生时考两次都过不了英语最低线，所以一直没有上得了北大研究生。但时任系主任的丁石孙非常喜欢王鲁燕（还有后面要谈的张益唐）的数学才气，破格把他留校当老师了！！

1989 年我在英国博士毕业，第二年到加拿大温哥华当助理教授。两年后北大徐明耀教授到我们系访问。当时我是单身一人，经常周末给不会做饭的徐老师做饭吃，虽然我的厨艺非常一般，但我们饭后的聊天可以忘掉饭菜水平的不足。徐老师很能聊，给我印象深刻。

徐老师也是丁石孙喜欢的人，研究代数的。文革前的大学生、1960 年代北大数





北大徐明耀教授

学系应该算是比较左的，据他告诉我，他们毕业前的最后半年赶上北大的“四清”，他们被进行了半年的毕业教育。近半年的时间，什么也不干，就是政治学习和批判。每个人要彻底地清理思想，人人过关。这次过关的负产品是有两个学生被戴上了“反动学生”的帽子，其中一个就是徐明耀。后来，他就被分配到唐山的一个中学，戴着“帽子”被教育了十年，身体受到极大损害。他文革后又回到北大成为了第一批硕士研究生之一；之后成为北大教授。他给我的印象之一是非常关心政治，他可以大段背诵马克思或列宁的书。这使我认识到他文革倒霉是有自身原因的。第二是对代数充满热爱，我印象很深的是他那时写了本代数书，由于印刷失误，书上多印了一个积分符号。对微积分颇不以为然的他非常生气，“我这么纯洁的书里面居然有积分这个豆芽菜？”想必这本高书就是著名的赵春来、徐明耀《抽象代数 I》或《抽象代数 II》吧。

徐明耀老师的主要研究领域是有限群

论、代数数论、计算群论等。他当时到加拿大访问的是我们系的教授阿什巴赫（Brian Alspach），作图论的，也用一些群论；所以徐老师的群论专长也可以发挥得很好。徐老师对王鲁燕一直很欣赏，那个时候王鲁燕在国内读研究生的希望已经不大，所以他就想把王鲁燕推荐到阿什巴赫那里。我们这位阿什巴赫教授有一个爱好，就是每个星期要到赌场去打牌；用数学知识实战赌场。他听徐明耀把王鲁燕的数学才能、智商描绘得很高，很感兴趣，立刻问：“他会打牌吗？”

要知道王鲁燕虽然英语考不及格，桥牌英语绝对一百分。他在大学期间和北大 78 级的袁勇搭档，另一对搭档张林波和沈捷，是北大很有名气的桥牌队。他大学毕业留校后，在数学竞赛界和桥牌界都享有盛名。徐明耀当然毫不犹豫地告诉阿什巴赫王鲁燕的牌技是一流的，说得阿什巴赫眉飞色舞，当时就说只要王鲁燕英语能过最低的托福线，就可以录取他。

一个月后我正好要访问北大；因为我当时和北大的滕振寰老师合作一项研究。徐明耀就叫我去找王鲁燕。见到他后，王鲁燕说他真不想出国，但现在国内没有研究生学位可能不好办，最主要的是结婚后没房子，晚上只能在办公室里拉个帘子，老婆很有意见。所以他对阿什巴赫的好意很有兴趣。但他对最低的英语成绩也毫无把握，所以最终他也没有去加拿大。

后来我听说他还是考过了托福，居然分数还不错。他去了普渡（Purdue）大学，这里也是张益唐读博的地方，只是那时张益唐已经毕业离开了。王鲁燕在普渡的时光，花了不少时间在网络上打桥牌。普渡那时的朋友还记得他的一个桥牌轶事。那时几乎每天中午，有些教授午饭时间在教师俱乐部打桥牌；王鲁燕常坐在某位牌手旁边看牌。经常叫完牌开打前，他就可以猜出其他三位手中的牌，并且是八九不离十。这点让很多老师都佩服得五体投地。

可能用在打牌上的时间太多，他在普渡的学习受到影响，资格考试受挫。于是，他转学来到匹兹堡大学学习；2001 年数学博士学位毕业，现在在一家计算机软件公司工作。最新在网上看到，王鲁燕在匹兹堡华人教会上

作见证，演讲的第一段是：“我是一个内心非常骄傲的人。尽管我没什么太多骄傲的资本，却看不起任何人。神能让我这样骄傲的人得救是他行的一件大神迹。”

我的文章写在善科问答网站上，因为我觉得这个网站给想写数学文章的作者提供了很多方便，可以很容易地放链接、传相片和打数学公式。第一天我写了文章的三分之一，

就被“好事者”传到北大的 BBS 未名空间站。有一个跟帖写得很有意思，传神地描述了王鲁燕出国前在北大的教书生涯：“他在曾经的大一新鲜人中名声如雷贯耳啊。他讲线性代数，从有限群讲起。期中考试，好像定规矩延时可以，但要扣分，然后给了几个人负分。呵呵。老王是个性情中人啊。”也只有北大才可以出这样的“名师”啊。

## 人物之二：张益唐

张益唐的故事这几天在很多媒体上开始流传，但在 2013 年 5 月 10 日以前，知道他名字的可能屈指可数。知道他行踪的也没有几个。为了潜心研究数学，他几乎与世隔绝，在美国的偏远省份潜伏下来。2000 年初，他的妹妹曾在网上发寻人启事，哥哥张益唐失去联系了。当时在宾州州立大学当教授的张的老同学给他妹妹回了电邮，表示他哥哥健康地活着，在钻研数学呢。

1990 年中，我和沈捷讨论写一本微分方程谱方法的书（这本近 500 页的书终于在 15 年后的 2011 年完稿；由施普林格出版社出版）；为此沈捷到温哥华访问了我一周。研究之余，我们也闲聊了北大时候的一些老师、同学，他就说了张益唐的故事。虽然我大学就听过张益唐的大名，知道他是数学系的高材生，但张益唐的故事很多是从和他接触较多的校友那里知道的。

张益唐是北京人，1955 年出生，1978 年进北大数学系。

《人民文学》杂志 1978 年第 1 期上，作家徐迟发表了一篇报告文学《哥德巴赫猜想》，讲述了数学家陈景润刻苦钻研，终于在哥德巴赫猜想研究上取得重大突破的真实故事。《人民日报》和《光明日报》随即转载，一时间陈景润和哥德巴赫猜想变得家喻户晓。关于哥德巴赫猜想的故事，中科院数学院贾朝华在《数学文化》2010 年第 4 期上的文章《从哥德巴赫说开去》是一篇难得的高水平的科普文章；此文文笔优美，从历史的画卷上写数学，让人有品尝美味咖啡的感觉。

像那个时代很多有志青年一样，张益唐也是被徐迟的文章、被陈景润的故事、被哥



张益唐

德巴赫猜想引导到数学系，以致终身投入到数学中去。

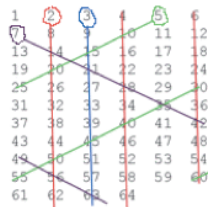
北大的 7 年为张益唐打下了坚实的数学基础；那时的北大教书育人之风极强，最顶尖的教师都在讲台上耕耘。代数高手段学复、聂灵沼、丁石孙、潘承彪，都给张益唐这些代数爱好者打下了基础。北大也有很多眼界很高的老师，学富五车，但不轻易落手写小文章，像江泽涵、廖山涛、段学复等，但谈



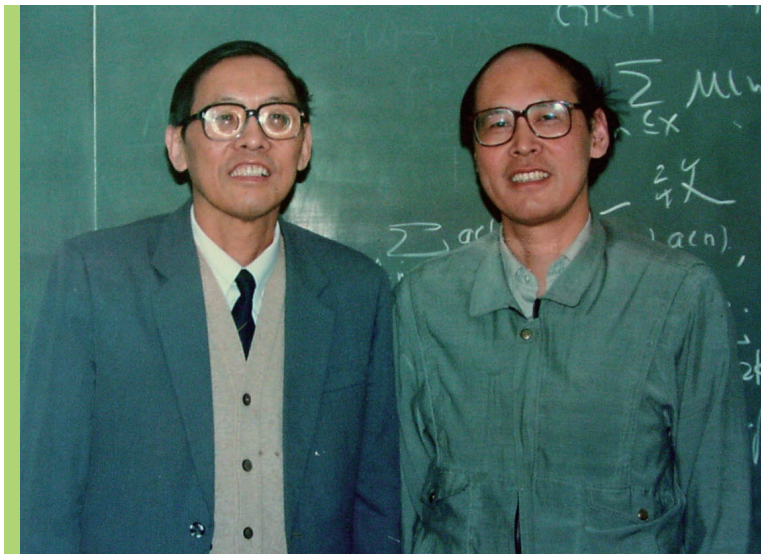
**Chen's theorem (1966).**  
There exists infinitely many pairs  $p, p+2$ , where  $p$  is a prime, and  $p+2$  is either a prime or the product of two primes.

This is the best partial result we have on the **twins prime conjecture**. The proof uses an advanced form of **sieve theory**.

The Sieve of Eratosthenes,  $n=1$  to 64



著名数学家、菲尔兹奖得主陶哲轩对陈景润工作的介绍



1995年潘承洞与潘承彪于山东大学（展涛 摄）

起大问题颇为津津乐道，这让年轻的王鲁燕、张益唐们“中毒”匪浅。也只有北大，才能够让王鲁燕、张益唐们活得很舒服。很难想象，英语一塌糊涂、在其他学校很可能无法生存的王鲁燕，在考研连续失利的情况下，还可以留在北大任教，系主任人前背后还把他夸成一朵花。要不是结婚后生活压力太大，王鲁燕也许会在数学上留下一篇神话。

张益唐 1982 年毕业后跟随著名数论专

家潘承彪读了三年的硕士。潘承彪教授的哥哥就是大名鼎鼎的前山东大学校长、因在哥德巴赫猜想方面的工作而闻名的潘承洞院士；而我们《数学文化》的主编刘建亚、编委蔡天新都是潘院士的高足。潘氏兄弟也是北大数学系校友，哥哥是 1952 年入学，弟弟是 1955 年入学。丁石孙在他的《自述年谱》中对他们有这样的描述：“潘承洞认为潘承彪基本功比较扎实，他有什么想法，就让他弟弟帮着算。”大学毕业后，哥哥去了山东，弟弟留在北京。

北大数学虽然 77 级没有招生，但于 1982 年初还是招了 77 级本科毕业生作为硕士研究生；那是 1966 年后上高中的人第一次成为研究生。那时的北大，大学生戴白底的校徽，研究生戴桔黄底的校徽，教师戴红底的校徽。80 年代初在北大校园最难看到的是那些带橘黄色校徽的天之骄子；大概全校也就 100 多位吧（现在很多学校一个系的研究生就可以顶上那时全北大的研究生数了）。因为历史的原因，1977 级的学生是 78 年的春季入学的，而 78 级的学生是 78 年秋季入学的；所以这两届研究生的入学时间也就相差半年。1982 年初来北大读数学研究生的有南京来的田刚（现北大数学院院长）、巫孝南（现香港浸会大学教授）、山东来的张继平（前任北大数学院院长）、上海来的张来武（现中国科技部副部长）、湖南来的许进超（现美国宾州州立大学讲座教授）、武汉来的吴志坚（现美国阿拉巴马大学数学系主任）等，其中北邮考进来的贾朝华（现中科院数学院的教授、1998 年国家杰出青年基金获得者）师从潘承彪教授，研究解析数论，并且他在北大读完了硕士和博士。张益唐是 1982 年秋天本科毕业后跟随潘承彪的，也是研究数论。

硕士研究生毕业后，张益唐来到了位于美国中西部印第安纳州西拉法叶（West Lafayette）的名校普渡大学读博士。普渡大学最著名的是其工学院；我前年去台湾的成功大学访问，在其校史馆里第一次知道是普渡大学把一个小小的台南学院变为亚洲名校。其中多名普渡教授在 1950-60 年代的台南乡下一住就是十几年，把一个穷孩子硬给拉扯成了一个高富帅的小伙子。美国的普渡





张益唐的博士导师莫宗坚



1993年北大78级同学在沈捷(中)、陈敏(右2)夫妇家中聚会。左为张益唐(沈捷提供)

大学所在地属于典型的乡下，最大的乐趣也许就是钓鱼，摘摘老玉米了。这应该是研究数学，特别是纯数学的天堂了。

张益唐在美国的导师是从台大走出去的代数专家莫宗坚 (Tzuong-Tsieng Moh)，他1969年从普渡大学开始学术生涯直到今天。北京大学数学丛书里面的莫宗坚的《代数学》是很不错的代数参考书。莫老师也是性情中人，网上流传的他的《少年游——我的大学时代》很精彩，看看小标题就能体会到：“读书记；生活记；恋爱记；跷课记…”。文章开头一段：“民国四十七年（一九五八年）我从中部的台中一中考上了台大化学系。当我只身远赴台大报到入学时，看到堂堂学府，几排高大的椰子树，眼睛为之一亮。又有梳着清汤挂面头发的女生们奔走在校内路上，真是一个新奇的世界！”就颇为雷人。中间追女生段的开头“经过了一、二年的苦读，我才发现女同学们脸若春花，眸若点漆。有些小和尚们，经也不念，钟也不打：‘不拜佛祖，只拜观音’。王俊明坦言：‘不论追不追女生，总要花同样的时间想女生’”也算实话实说的经典。

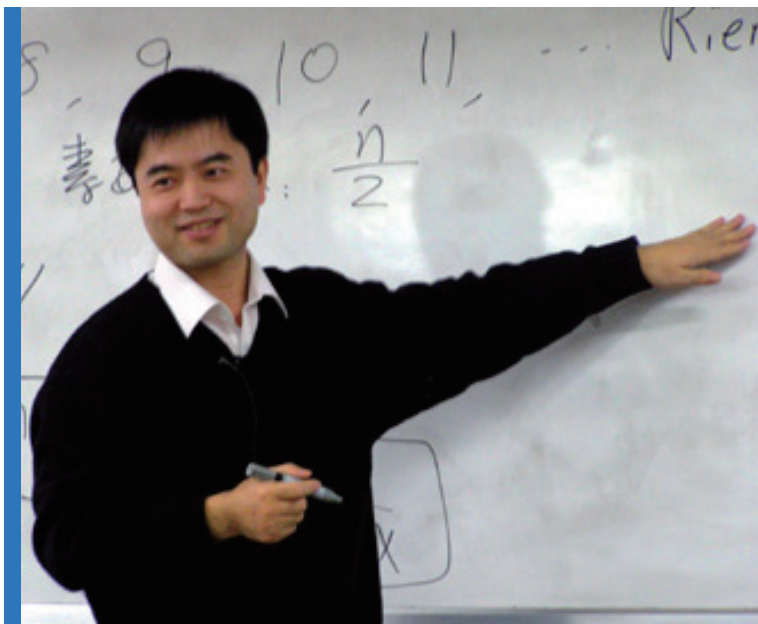
张益唐的博士题目是雅可比猜想 (Jacobian conjecture)；这一猜想由德国数学家科勒 (Ott-Heinrich Keller, 1906-1990) 于1939年提出来，是关于多个变量的多项式里面的一个猜想。这个猜想本身很有名，但更有名的是经常会产生错误的证明。莫教授在

普渡大学自己的网页上就挂了两篇短文章，一个是说 Kuo-Parusinski-Paunescu 的雅可比猜想证明是错的，另一篇是说中国科大的苏育才的证明也是错的；这两篇纠错的文章七、八年前就上网了。

张益唐也曾牺牲在雅可比猜想上，并且比较惨重。他90年代博士毕业前夕，宣称解决了雅可比猜想，并且有几个专家对他的证明很感兴趣。但是，不幸的是他的证明里的一个引理是其导师莫宗坚的一篇发表的成果，本以为是对的，但再排查时，查出莫教授之前的结果是错的。你应该知道后果很严重吧？张益唐几年的主要心血付之东流了！！

如果雅可比猜想那时被张益唐攻克了，他应该可以毫不费劲地拿下数学界最高的菲尔兹奖，因为这个问题太有名，并且他那时候才三十几岁，低于菲尔兹奖得奖的上线岁数四十。可是这只能是虚拟语气了。想当年天才约翰·纳什作出了著名的纳什嵌入定理 (Nash embedding theorem) 也在翘望菲尔兹奖，结果未能如愿，导致精神失常。好在三、四十年后，诺贝尔奖委员会根据他研究生博士论文建立的纳什均衡理论给了他一个经济奖，才横扫了失去菲尔兹的阴霾。

虽然未能全部解决雅可比猜想，张益唐对这个问题的部分解决还是有些贡献的，所以他还是于1991年拿到了普渡大学的博士学位。可是，因为博士论文的结果没有正式发表，



中科院数学院教授、新罕布什尔大学教授葛力明

加上和导师的关系极不融洽，张益唐变成博士到手失业开始，连个博士后都没有找到。

不过张益唐毕业的时候是历史上数学最难找工作的时候。当时苏联刚刚解体，那里培养的大量数学人才大部分投奔美国、欧洲，很多训练有素、富有成果的俄国数学家向一个个美国的数学系投简历，这严重冲击了美国的数学就业市场。没有发表过论文、没有导师推荐信的张益唐要找到大学教书的工作显然是非常困难的。

对张益唐在普渡的八年，他的博士导师莫宗坚在张益唐出名后的10天内，写了一篇文章：“张益唐1985年1月至1991年12月在普渡的岁月”，描述了张益唐那几年的学习和工作。文中说：有时我后悔没有帮他找工作（Sometimes I regret not fixing him a job）；他从此再也没有找我写过推荐信（He never came back to me requesting recommendation letters）。在这篇文章中，莫教授还说张益唐是一个有生活情趣的人，曾经被选为普渡大学中国留学生协会主席，并且干得不错；他也认为张益唐的古典文学修养很好。

一面要继续做数学，一面还要糊口。毕业后的前六、七年他干过很多杂活，包括临

时会计、餐馆帮手、送外卖。你能想象一代北大数学才子、数学博士好几年送披萨饼、在KFC卖炸鸡的情形吗？看到这里，你是否对孟亚圣的“天将降大任于斯人也，必先苦其心志，劳其筋骨”有更深刻的理解呢？

张益唐毕业后基本隐居起来，很少和人来往，他和同学们的联系方式之一就是同学生日时电邮一个生日问候。他居然能记住班上所有同学的生日，这可能是我们这些凡人做不到的。那时他的一些同学已经在美国大学里拿到助理教授、副教授甚至正教授的位置，比如同班同学沈捷、陈敏夫妇已经在宾州州立大学有正式教职。张前几年每年会找这两口子吃顿饭，基本是悄悄来，悄悄走，一年之间基本杳无音讯。

从1999年到2005年，张益唐又回到了学校，到美国的新罕布什尔大学（University of New Hampshire）做一个非编制的助教。新罕布什尔州是位于美国新英格兰地区的一个州，绰号叫“花岗岩州”，因为本州产花岗岩，另外也是因为这个州比较坚守传统观念，政府非常节俭。而新罕布什尔是成立于1866年的一所综合性公立大学，学校位置不错，坐落在美丽的达勒姆（Durham）镇上，步行即可到达市中心；曾被《纽约时报》选为全美最好的大学之一。虽然教学量比较大，比起有正式教职的工资性价比低很多，但能回到学校，做自己驾轻就熟的事情，还能利用图书馆、办公室做研究，对一个胸有大志的数学家来说，应该还是比较满足的。

2005年以后，在大学里代课了六年的张益唐获得转正，变成了有比较稳定位置的讲师，主要任务还是上课，据说也只是一年四门课的教学任务，和大学里面的其他教授的工作量相仿，没有行政工作和申请经费的压力。对这个位置，科研是不算工作量的，研究经费是面向那些助理教授、副教授、正教授这些所谓的faculty序列的。但是，对于一个胸中有数学的人来说，没有经费的支持可以换来更多平静的思考时间，何尝不是一件好事呢？

张益唐为什么会落脚新罕布什尔大学？这里面有两个主要人物，都是我们北大80级的同学；一个是唐朴祁，一个是葛力明。

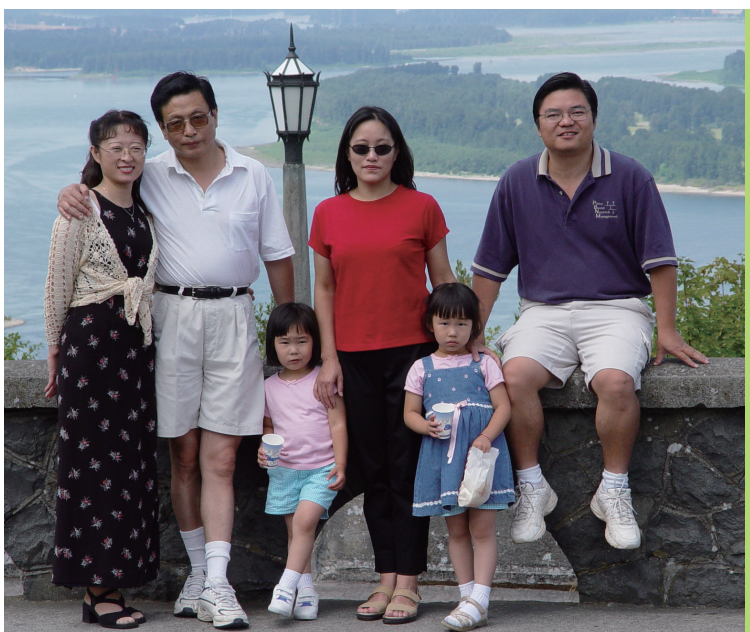
1999年初，已经在美国Intel实验室工



作了几年的唐朴祁去纽约参加 IEEE 年会；他在会上发表了一篇关于网络交通（Network traffic）的文章。这个研究解决了数字网络服务质量（QoS）的一类实时量化的问题。唐朴祁和一个同事把多种可能情形的效率进行了研究，结果它们可以把各种情况提升到最优的  $O(n)$  复杂性，这种线性复杂性已经是不可以做任何改进的了。但有一种情形只有复杂度为  $O(n \ln(n))$  的结果，这当然不是最优的，会成为此算法在高速网络实时应用时的障碍。开会期间，唐朴祁找到在纽约的张益唐，因为张益唐没有固定电话，找到他还是不容易的。他们见面后，唐朴祁发现老友有些疲惫沉默，于是就和他聊他感兴趣的数学。特别聊到他们在计算复杂性方面遇到的这个困难。大约三周以后，张益唐告诉唐朴祁他看懂了这篇文章并对余下的这个数学问题有主意了。在电话上来回交流几次以后，他们终于找到了最优的线性解。这就导致了唐、张的一个合作的专利。我谷歌了他们二人的英文名字，立刻找到了他们的专利。据说这个专利已经在计算机网络基础设施领域中有广泛应用。三个星期啃下一个有广泛实际用途的计算机算法难题，让张益唐顿觉宝刀不老，信心大增。唐朴祁也对老友的数学实战功夫印象深刻。

同年晚些时候唐朴祁到哈佛参加 ACM 会议时，特意和在波士顿附近工作的葛力明提起张益唐的强大分析实力和他当时的艰难处境。作为学长的张老师不仅做过他们的习题课老师（应该是抽象代数吧？），也是他们自己组织的大学生讨论班上的常客，他们从张老师那里学到过很多数学。给他们印象最深的是，无论在任何环境下，他们的这位好友都在思考数学、心里总是装着那几个数学大问题。

这次和葛力明见面时，唐朴祁已经不知道张益唐的准确工作地点。此时从宾州大学博士毕业并在大学有固定位置的葛力明似乎更有条件帮一下他们的朋友和老师。经过一番周折，葛力明在美国南方的一个赛百味快餐店（Subway）联系上了张益唐。两三天后张益唐就来到新罕布什尔大学做访问学者了。每过几天，张老师都会说，有进展，应该很快就出来了。但时间过得很快，两个月、



张益唐夫妇（左）新婚蜜月期和唐朴祁全家的合影

三个月，两年、三年……，后来的故事大家都知道了，十四年后，张益唐的文章被权威期刊《数学年刊》接受了。当然，在美国大学里要留一个没有多少资历的人十四年肯定不是一件简单的事，中间也有酸甜苦辣的故事。但有张益唐这样传世的好结果，任何付出都值得。这其中帮他最多的是今年四月十九日刚去世的新罕布什尔大学数学系前系主任凯尼斯·阿佩尔（Kenneth Appel）。阿佩尔也是世界级的数学家，他和沃夫冈·哈肯（Wolfgang Haken）借助电脑在 1976 年首次证明了四色定理，这也是载入史册的工作。值得欣慰的是，在这位伯乐去世的前两天，他已得知张益唐的结果，这无疑是对他多年来付出的最好报答。

我们 80 级的帅哥葛力明过去的十年一半时间在中科院数学院工作，教书育人，深得国内同行的好评；同时他也是新罕布什尔大学数学系的大教授了，他在国际数学家大会上应邀做过 45 分钟报告，这在他们学校应该是凤毛麟角的了。更重要的是，作为北大数学系的 80 级学弟，对于数学好、又痴迷于数学的学长，他真正做到了出手相助！普通数学家崇拜名气大权力大的，但真正数学家





唐补祁（左）与张益唐

是敬仰那些为了数学而痴迷而献身的！

更重要的是，在新罕布什尔大学数学系，张益唐又可以在数学讨论班上把自己新的想法、新的工作与大家分享。这样，他平生的第二篇文章，关于黎曼猜想的文章（*On the zeros of  $\zeta'(s)$  near the critical line*）发表在重量级的数学期刊《杜克数学》（*Duke Mathematical Journal*）上。之后，他还有一篇 50 多页的关于朗道 - 西格尔（Landau-Siegel）零点猜想的文章（*On the Landau-Siegel Zeros Conjecture*）放在数学公开平台网上。因为当时张默默无闻，文章被当成民科作品忽略了。现在发现他有真才，文章

又被翻出来，有评论说这可能是解析数论的另一个重大突破。而现在已经被承认的孪生素数猜想文章也是在葛力明的讨论班上讲过的，从这里走向世界的。

很多他的大学同学都不知道张益唐成家了。张益唐多年前结婚了，妻子是山东人。在引起公众注意后，张益唐在加州工作的妻子提醒他的第一件事是记得把头发梳理好。

在此节收尾之前我要聊两个题外话。张益唐在北大本科的专业是计算数学专业，最后做了纯数学的大事。无独有偶，著名数学家、北京大学和普林斯顿大学的数学讲席教授田刚，毕业于南京大学计算数学专业；29 岁就成为芝加哥大学数学系正教授、现在是纽约大学柯朗研究所讲席教授的林芳华，毕业于浙江大学的计算数学专业。也许要想做好纯数学，先学计算数学有好处？当然了，这只是小概率事件了。另外我也侃一下我为什么选了计算数学专业。北大数学系选专业是大二的下学期。前两年所有的学生不分专业，都在一起上课。我们大二下学期，每个专业选一个老师来讲自己的专业，属于“忽悠”吧。先上台讲的是概率统计专业的陈家鼎教授，讲了统计的重要性，特别提到概率统计的殿堂级人物柯尔莫戈洛夫的理论如何了得，如何优美。等一会计算数学的黄敦教授开讲，他的第一句就是：“刚才有人大谈特谈柯尔莫戈洛夫。请问在座的各位，谁见过柯尔莫戈洛夫？”冷场半分钟后，黄老师提高嗓门说：“我，黄敦，我见过柯尔莫戈洛夫。”全场鼓掌；那一届计算数学专业学生数远超其他任何专业。

## 再谈哥德巴赫猜想和孪生素数

前面已经谈了素数分布定理、孪生素数的定义。作为《数学文化》期刊，既然要做一手传播，还需要加点有数学味的部分，供有些数学基础的读者欣赏。因此，我在本文初稿完成后，专门请教了数论专家、我的《数学文化》的搭档刘建亚教授，听了 he 一个半小时的课，长了很多学问。

1900 年，希尔伯特在第二届国际数学

家大会上提出了著名的二十三个希尔伯特问题，其中第八个问题就包括了哥德巴赫猜想和与它类似的孪生素数猜想。很多人认为这两个猜想是紧密相关的，其证明难度也相仿。所以攻克孪生素数猜想对数学发展来说是非常有意义的大事。

所谓的哥德巴赫猜想，其实是 17 世纪一个叫哥德巴赫的业余数学家在给大数学家欧

拉的一封信中提出的一个问题。哥德巴赫算不上数学家，但是他偶然发现的问题却让他扬名了。他发现：任何一个大于等于6的偶数，都可以写成两个素数的和。例如  $6 = 3 + 3$ ,  $20 = 7 + 13$ ,  $100 = 3 + 97$  等等。不过，他只是验证了很多数满足这一规律，却无法给出证明。

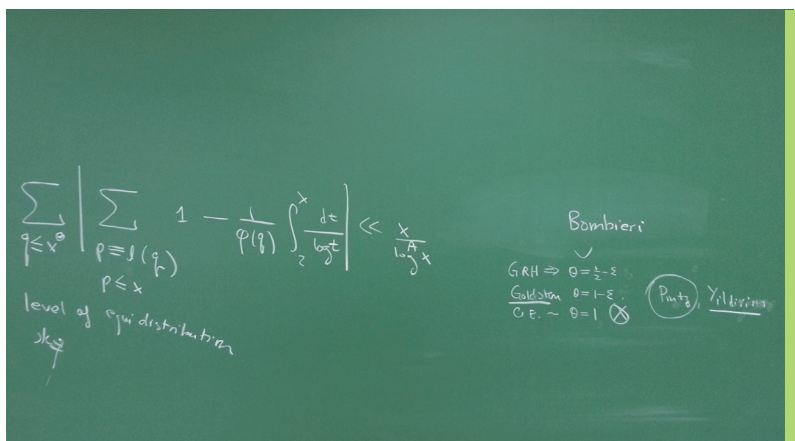
后来，辗转几个世纪，一直没有人证明它。1920年挪威数学家布朗建议将证明分成若干步骤，就是先证明任何充分大的偶数都可以表示成两个正整数之和，其中一个正整数的素因子个数都不超过  $a$ ，另一个素因子个数都不超过  $b$ 。先对比较大的  $a$  和  $b$  证明，然后逐步缩小，如果最终缩小到  $(1, 1)$ ，那么就证明了哥德巴赫猜想。不过很可惜，到目前这个定理还没有得到证明。最接近的  $(1 + 2)$  是中国数学家陈景润的成果。1956年，中国数学家王元证明了命题  $(3 + 4)$ ，由此开启了中国数学家在哥德巴赫命题  $(a + b)$  研究上的先河。之后，王元和另一位中国数学家潘承洞又得到了若干重要的结果，使得我国在哥德巴赫猜想方面的研究达到了国际先进水平。1966年，陈景润宣布证明了命题  $(1 + 2)$ ；1973年，他发表了  $(1 + 2)$  的全部证明。这些信息我们可以从徐迟的报告文学或贾朝华的文章里得到。

无论哥德巴赫猜想还是孪生素数猜想，都涉及两个素数。因此，要想证明这两个猜想，必须先了解素数在形如  $qm + a$  的算术级数中的分布，此处  $q$  与  $a$  互素，而  $m$  跑遍所有正整数。

素数在形如  $qm + a$  的算术级数中的分布规律如下：当  $x$  趋于无穷大时，不超过  $x$  且满足  $p \equiv a \pmod{q}$  的素数的总个数满足渐近公式：

$$\sum_{p \leq x, p \equiv a \pmod{q}} 1 \sim \frac{1}{\varphi(q)} \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

其中左边的那个求和号底下的式子表示考虑所有的素数  $p$ ，这些素数  $p$  不超过  $x$  并满足和  $a$  的差能被  $q$  整除；而左边的求和就表示满足这两个条件的素数的总个数。



刘建亚给本文作者讲解的公式

减号后面分母下的  $\varphi(q)$  是欧拉函数。这个公式对每个固定的  $q$  成立，但是这是不够的；我们需要了解当  $q$  可以与  $x$  一起增大的时候，这个公式是否正确。这是一个非常困难的问题。在平均意义下，我们有如下结果

$$\sum_{q \leq x^\theta} \max_{\substack{q, a=1 \\ (q, a)=1}} \left| \sum_{p \leq x, p \equiv a \pmod{q}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \int_2^x \frac{dt}{\log t} \right| \ll \frac{x}{\log^A x}, \quad (*)$$

其中  $A$  是任意正数。最左边的求和表示对所有不超过  $x$  的  $\theta$  次方的正整数求和，这里的  $\theta$  称为素数在算术级数中平均分布的“水平”， $\theta$  越大即水平越高，也就越难以证明。

1948年，匈牙利数学家任义 (Alfred Renyi) 得到了  $\theta$  的存在性，但是没有给出其具体数值。任义由此推出哥德巴赫猜想方向上的命题  $(1 + b)$ ，这里  $b$  是一个依赖于  $\theta$  的正整数，随着  $\theta$  的增大而减小。因此任义的  $\theta$  是个未知的天文数字。

1962年潘承洞证明了  $\theta$  可以取  $1/3$ ，进而推出命题  $(1 + 5)$ 。利用这个  $\theta$ ，王元证明了  $(1 + 4)$ 。同年，潘承洞进一步证明了  $\theta$  可以取到  $3/8$ ，进而用简单的筛法也证明了  $(1 + 4)$ 。1965年，苏联数学家布什塔波 (A. Buchstab) 用这个  $\theta$  加上复杂的筛法证明了  $(1 + 3)$ 。

1965年意大利数学家邦别里 (E. Bombieri) 以及苏联数学家维诺格拉多夫 (A. I. Vinogradov) 独立证明了  $\theta$  可以取任何小于



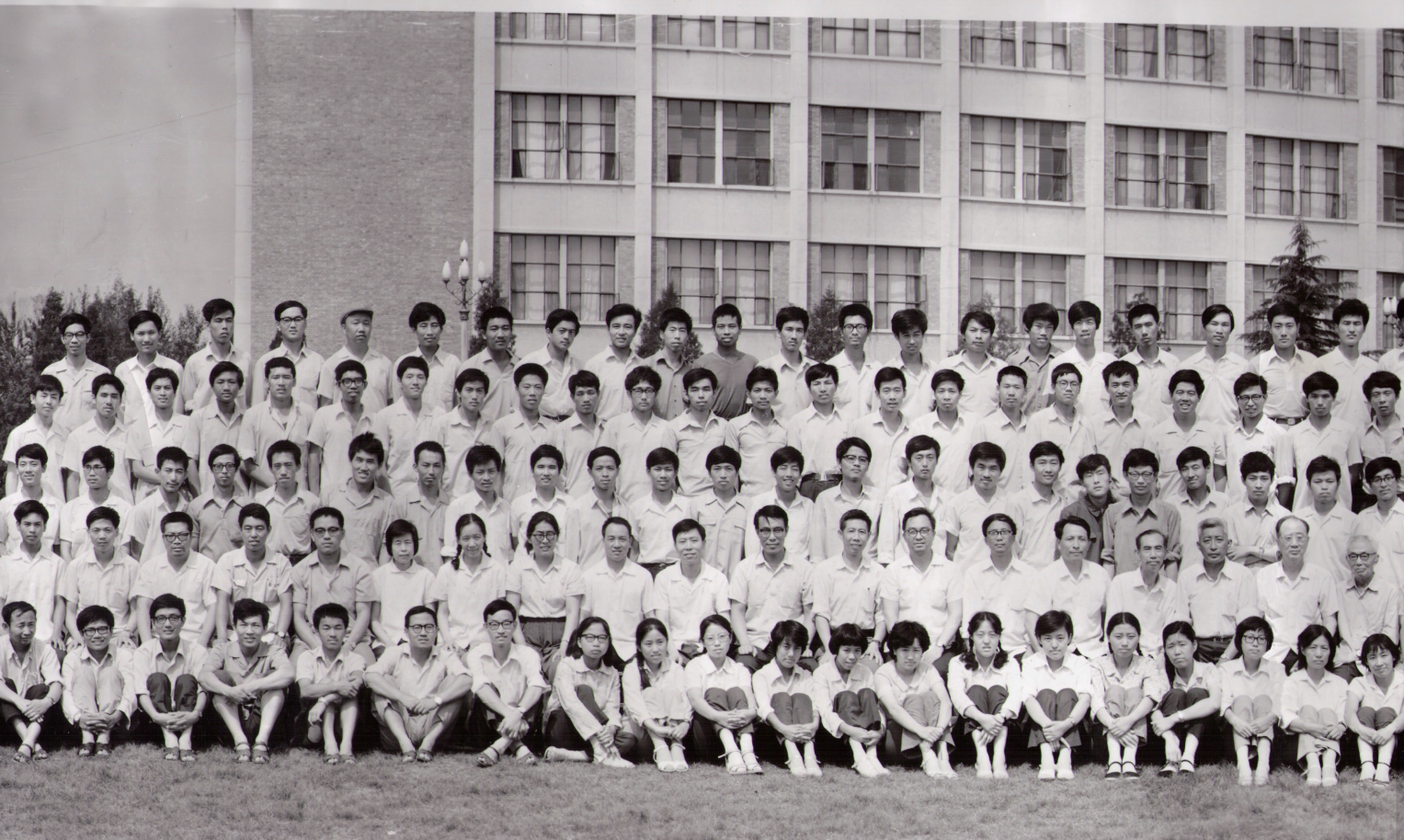
$1/2$  的正实数。这相当于证明了，广义黎曼猜想的一个重要推论在平均意义下成立，而且这个结果可以在很多场合替代广义黎曼猜想。邦别里因此获得 1974 年的菲尔兹奖。1966 年陈景润利用邦别里 - 维诺格拉多夫的  $\theta$  证明了命题  $(1 + 2)$ ，并发表了论文摘要。由于文化大革命的原因，陈景润论文的全文直至 1973 年才得以发表。

上述关于平均分布水平  $\theta$  以及命题  $(1 + b)$  的历史，同样适用于孪生素数猜想，并给出  $(1 - b)$  的结论。例如，陈景润的  $(1 + 2)$  的证明也推出关于孪生素数猜想的命题  $(1 - 2)$ ，也即方程  $p - P_2 = 2$  有无穷多组解，其中  $p$  是素数，而  $P_2$  至多有 2 个素因子。

然而孪生素数猜想有其特殊性，也即方程  $p_1 - p_2 = 2$  的右端是个固定的常数 2，这与哥德巴赫猜想不同。注意到这点，公式 (\*) 中的  $a$  可以简单地取为 2；此外可以要求  $q$  只取某些满足好的性质的正整数，而不是取遍所有的正整数。有了这些变化，可以把 (\*) 当中的水平  $\theta$  做得更大，甚至超过  $1/2$ 。注意到这样强的结果，已经不再是广义黎曼猜想的推论了。1980 年代，邦别里、加拿大数学家弗里德兰得 (John Friedlander) 以及前面提到的张益唐文章的审稿人伊万尼克等致力于证明这样的平均分布结果，他们得到的水平  $\theta$  可以大到  $4/7$ ，这个数是大于  $1/2$  的。

公式 (\*) 中的水平  $\theta$  最大可以取多大

## 北京大学数学系一九八二



北京大学数学 78 级毕业照。2 排左 17 至 21：丁石孙、段学复、江泽涵、庄圻泰、程民德。3 排左 18：王鲁燕，4 排左 21：张益唐。



呢？当  $\theta = 1$  的时候，大家已经知道 (\*) 是错的。因此最高的期望是， $\theta$  可以取任何小于 1 的正实数；这个期望被称为艾略特 - 哈伯斯坦猜想 (Elliott-Halberstam conjecture)。假设这个大胆的猜想正确，前面提到的加州圣荷西大学的戈德斯通、匈牙利数学家约翰·宾兹 (János Pintz)、土耳其数学家谢姆·伊尔泽姆 (Cem Yildirim) 在 2010 年合作证明了：存在一个正偶数  $h \leq 16$ ，使得方程  $p_1 - p_2 = h$  有无穷多组解，其中  $p_1, p_2$  都是素数。注意，这是一个条件结果；并且假设的条件艾略特 - 哈伯斯坦猜想未必正确。

张益唐在他的《数学年刊》论文中，首先证明了 (\*) 对某个大于  $1/2$  的水平  $\theta$

成立，进而由此推出：存在一个正偶数  $h \leq 70000000$ ，使得方程  $p_1 - p_2 = h$  有无穷多组解，其中  $p_1, p_2$  都是素数。请注意，这个结果是无条件的！张益唐成功地避开了艾略特 - 哈伯斯坦猜想的假设。

我们可以把张益唐的这个定理简称为  $(1 - \theta = h)$ 。这个  $h$  虽然未必是 2，但是上述结果的质量与经典的双生素数猜想所差不远。

刘建亚告诉我，张益唐的文章不但可以载入数论史，还可以载入数学史，将有深远的影响。另外，受过严格解析数论训练的人都可以看懂这篇文章；山大的数论研究生就可以读懂。他们下次的数论讨论班就会讨论张益唐的文章。

## 届毕业生合影留念 一九八二年七月六日







北大数学系 80 级毕业 25 周年相聚于燕园。1 排右 7: 刘森; 2 排左 9: 葛力明; 3 排左 2: 张占海; 3 排左 4: 唐朴祁; 4 排右 2: 孟肖敏; 4 排右 5: 汤涛

## 结尾的几句话

过去的二十年是数学史上重要的一个时期;我们在有生之年见证了费马大定理的证明、庞加莱猜想的证明,还看到了孪生素数猜想的重大突破。作为华人,我们为张益唐的成功感到由衷的高兴。

文章结尾前先谈谈张益唐故事的启迪。基础数学的一些极其重大猜想的突破需要极聪明的天才,这些人包括国际数学竞赛的金牌得主(如陶哲轩、佩雷尔曼、吴宝珠),有受过正规数学训练、且被老师同学公认的数学高手(如陈景润、张益唐)。首先这些人要受过正规的数学训练。由徐迟先生力作带动的全民作猜想的做法是不可取的;希望这也不是张益唐的成功带来的副产品。第二,这些数学天才还需要对数学有无限的热情和执着,同时没有对物质的过高追求。后一点尤其重要。一颗平静的心胜过五颜六色的光环、五花八门的资源。在清贫中做出重大贡献的佩雷尔曼、张益唐的故事再次证明了这一点。

再回到北大数学 100 年,和此文开头呼应。北大数学 78 级的精英分子很多,很难一篇文章写完。本文仅仅通过王鲁燕、张益唐写出那个时代的一些往事。让我自己也过了一把回忆往事的瘾。实际上,78 级还有一些最终没有从事数学的同学,比如我前面提到

的刘森,他毕业后调去了中纪委,曾多年在中纪委的华北室工作。在 80 级同学聚会发言中,他告诉我们,在办案中用数学的逻辑,往往可以达到事半功倍的效果。十年前河北、黑龙江那两个大腐败案都是他们室主抓的。为此,居然有人对他的办公室窗户打黑枪。还有些同学离开数学的原因是兴趣发生了变化。比如号称民族主义领军人物的王小东,他自称 78 年入大学头两年成绩上乘,后不读数学,只读英语小说。毕业后学习经济管理并极力宣传民族主义,其著作《全球化阴影下的中国之路》颇有影响。

那个时代的北大数学人确实有多方面的精彩;像我的大学同学孟肖敏毕业后居然当了律师,开了个上海信天诚律师事务所;另一位同学张占海曾三次担任中国南极考察的领队和首席科学家,我们毕业 25 周年给母校的礼物就是张占海带回来的南极石。还有很多这样的故事真让我感到行行出状元,聪明人在哪里都可以出彩。

百年的北大数学培养了很多优秀的大学生和研究生,为中国数学、世界数学输送了众多精英;我相信再过一百年,北大数学将会更上一层楼,将会把更多的世界数学精英吸引到燕园,将会对人类的数学发展作出更大的贡献。

后记:感谢沈捷、唐朴祁、葛力明提供的宝贵信息。感谢刘建亚、卢昌海、蔡天新、游志平、欧阳顺湘、金石、励建书等朋友的支持。本文作者是香港浸会大学数学讲座教授、《数学文化》联合主编。