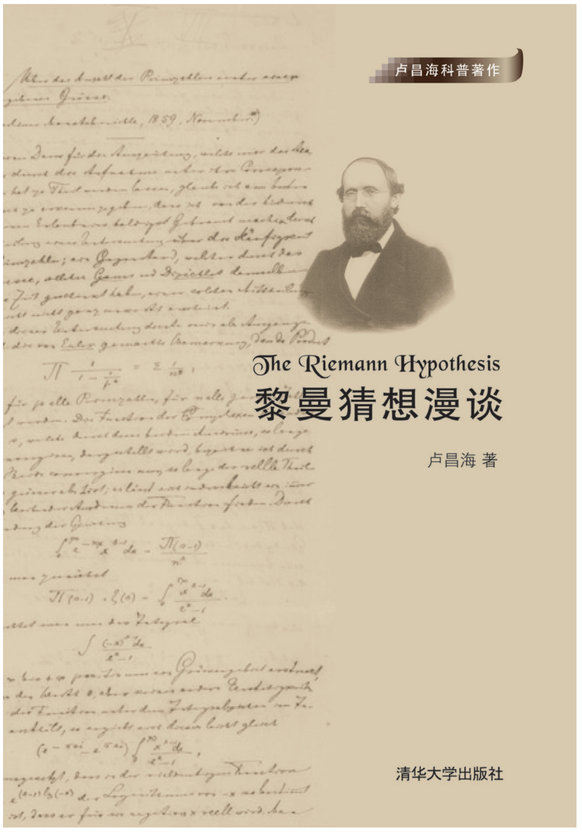
《黎曼猜想漫谈》读后感

王元



一

随着公众数学水平的逐渐提高，愈来愈多的人知道黎曼（Riemann）猜想这个问题，我们将它记为RH。特别是RH曾被希尔伯特（Hilbert）列入他的二十三个问题的第八问题，现在又被列为克莱数学研究所提出的千禧年七大待解决难题之一，倍受关注。不少人已经知道RH是数学中第一号重要问题。

但RH是个什么问题？为什么重要？至今似未见一篇有相当深度的普及文章来加以解释，常常需要参见数学专业著作与文献，才能得知一些。因此，一般人恐怕仅仅只知道有这么一个问题而已。

卢昌海在《数学文化》上的六期连载文章《黎曼猜想漫谈》，对RH相关问题作了详细的解释。文章中关于数学的阐述是严谨的，数学概念是清晰的。文字流畅，并间夹了一些流传的故事，以增加趣味性与可读性。从这几方面来看，都是一篇很好的雅俗共赏的数学普及文章。

二

数学普及文章最要紧的是严谨性，有一些普及文章像在讲故事，不谈数学本身，从而读者在读完后，难免会觉得不知其所以然，一头雾水。

RH发端于黎曼在1859年的一篇文章，其历史远比费马（Fermat）大定理（FLT）与哥德巴赫（Goldbach）猜想（GC）的历史短得多，而且不像这两个问题那样，只要有中小学数学知识的人，就知道其题意。

要了解RH的题意，则至少需要知道亚纯函数$\zeta(s)$的含义。所谓黎曼zeta函数$\zeta(s)(s=\sigma+it)$是一个复变函数，它在右半平面$\sigma>1$上由一个绝对收敛的级数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad(\sigma>1)$$

来定义的。所以，$\zeta(s)$在$\sigma>1$上是全纯的。它在左半平面$\sigma\le 1$上的情况如何呢？则需要将$\zeta(s)$解析延拓至全平面，延拓后的$\zeta(s)$是一个s平面上的亚纯函数，它只在$s=1$处有一个残数为1的1阶根。$\zeta(s)$仅在左半平面$s\le 1$上有零点$s=-2n$（$n=1, 2, \ldots$）。这些零点称为$\zeta(s)$的平凡零点，剩下的零点则位于狭带$0\le\sigma\le 1$之中，这些零点称为$\zeta(s)$的非平凡零点。所谓RH是说：

$\zeta(s)$的非平凡零点都位于直线$\sigma=1/2$之上。

RH 与素数在自然数中的分布密切相关。我想一般关于 RH 的普及文章也就讲到这里了。

卢昌海的文章从这里讲起，他介绍了 $\zeta(s)$ 的开端，即欧拉（Euler）关于 $\zeta(s)$ 的工作，其中 s 为实变数，及高斯（Gauss）关于不超过 x 的素数个数 $\pi(x)$ 的猜想

$$\pi(x)\sim\int_2^x\frac{dt}{\log t}=Li(x),$$

这是素数分布的中心问题。独立于高斯，勒让德（Legendre）也对 $\pi(x)$ 作了猜想

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x-1.08366}.$$

由于 $Li(x)\sim\frac{x}{\log x-1.08366}\sim\frac{x}{\log x}$，所以我们称

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$$

为“素数定理”。素数定理已由哈达马（Hadamard）与德•拉•瓦•布桑（de la Valee Poussin）于 1896 年独立地证明了。但人们期望有一个具有精密误差项的素数定理。可以证明用高斯的猜想公式比勒让德的猜想公式的误差项要精确得多。在 RH 之下，可以证明

$$\pi(x)=Li(x)+O(\sqrt{x}\log x).$$

反之，由这个公式也可以推出 RH。所以，这个公式可以看作 RH 的算术等价形式。由此足见 RH 的极端重要性了。

然后，卢昌海的文章深入到了 $\zeta(s)$ 较近代的重要研究：其实，黎曼的文章中还包括了几个未经严格证明的命题。除了 RH 之外，都被哈达马与曼戈尔特（Mangoldt）证明了，只剩下现在所谓的 RH。

命 $N(T)$ 表示 $\zeta(s)$ 在矩形 $0\le\sigma\le1$，$0<t<T$ 中的零点个数，黎曼作了猜想

$$N(T)\sim\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}.$$

这个结果已由曼戈尔特证明。命 $N_0(T)$ 表示在线段 $\sigma=\frac{1}{2}$，$0<t<T$ 上，$\zeta(s)$ 的零点个数，则赛尔贝格（Selberg）证明了，存在正常数 c 使

$$N_0(T)>cN(T).$$

这个结果是非常惊人的。它说明了 $\zeta(s)$ 在线段 $\sigma=\frac{1}{2}$，$0<t<T$ 上的零点个数与它在矩形 $0\le\sigma\le1$，$0<t<T$ 上的零点个数相比，占有一个正密度。而线段的二维测度为零。卢昌海还介绍了往后数学家关于 c 的估计的重要工作：$c\ge\frac{1}{3}$（列文森（Levinson））与 $c\ge\frac{2}{5}$（康瑞（Conrey））。

卢昌海用了相当多的篇幅介绍了 ζ (s) 的非平凡零点的计算方法与大量的计算结果。

这两方面的成果，大大地加强了人们对 RH 正确性的可信度。

三

黎曼 zeta 函数 $\zeta(s)$ 与 RH 都是“原型”，有不少 $\zeta(s)$ 与 RH 的类似及推广。这些类似与推广都有强烈的数学背景。

卢昌海的文章中谈到了这个问题，即他所谓的 RH 的“山寨版”与“豪华版”。所谓山寨版，就是 RH 的某种类似，而豪华版则为 RH 的某种推广。无论是山寨版，还是豪华版，其数学背景都是极其重要的。

卢昌海介绍了有限域 F_q 上的平面代数曲线对应的 RH，即每一条满足一定条件的代数曲线都对应于一个 L 函数，它们的零点都位于直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上。这一命题已由韦依（Weil）证明，而且韦依对于高维代数簇的 RH 也作了猜想。这个猜想已由德利涅(Deligne）证明。这些无疑都是二十世纪最伟大的数学成就之一。就我所知韦依与德利涅的结果对解析数论就有极大的推动。例如，由韦依证明的 RH 可以推出模素数 p 的克罗斯特曼（Kloosterman）和与完整三角和的最佳阶估计

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1}e^{2\pi i(cx+d\bar{x})/p}\right|\le2\sqrt{p}\qquad(p\nmid cd,\ x\bar{x}\equiv1(\mathrm{mod}\ p)),$$

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1}e^{2\pi i(a_kx^k+\ldots+a_1x)/p}\right|\le k\sqrt{p}\qquad(p\nmid a_k).$$

长期以来，对这两个问题都只能得到较弱的估计。又如命 $n(p)$ 表示模 p 的最小二次非剩余，则由韦依的结果，布尔吉斯（Burgess）证明了