数学聊斋连载

（连载四）

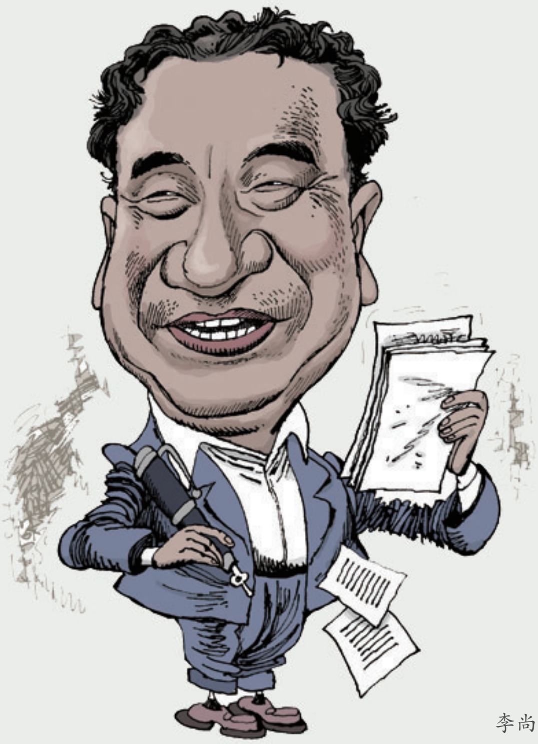
李尚志

明星做广告的责任

——非欧几何

明星经常做广告。很多人因为对明星的崇拜而相信明星做广告的产品，踊跃购买。但是，明星做广告的产品有时候也会被揭发为假冒伪劣产品，甚至是含有毒成分的食品。这时，有的消费者就会来追究明星做广告的责任，声称是受了明星的骗才买了这些产品，要求追究做广告的明星的法律和经济责任。这时候，明星就会出来大呼冤枉，很多媒体也会出来为明星喊冤，其理由也振振有词：“明星也是人，不是万能的，不可能具有鉴别这些产品的专业知识，也不可能花很多的时间和精力去鉴定这些产品的真伪好坏，怎么能够保证所做广告的产品的质量，怎么能够对产品的质量问题承担这么大的责任呢？”

这些理由听起来都很正确。但是，当明星做广告宣传产品的时候，他们是否也会将这些正确的话讲出来，提醒消费者不要做出错误的判断呢？是否也会在将产品吹得天花乱坠的时候也提醒一句：“我们明星也是人，不是万能的，不可能具有鉴别这些产品的专业知识，也不可能花很多的时间和精力去鉴定这些产品的真伪好坏，因此大家不要盲目相信我们的广告词，应当理性地作出自己的判断。”明星当然不会良心发现做这样的提醒，唯利是图的广告商更不会允许明星做这样的提醒。因为，广告商让明星做广告，其目的就是要消费者相信“明星是万能的，也是不会骗人的，他们说好的产品就一定是好”。明星之所以能够拿到



李尚志

高额的广告费，就是因为明星能够让更多的人相信他们是万能的，相信他们推荐的产品一定是好的。

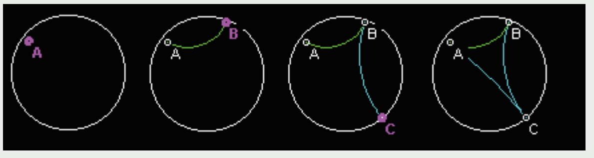
做广告的时候希望消费者相信“明星是万能的”，踊跃购买。出了问题又希望消费者相信“明星不是万能的”，不要追究他们的责任。我们不必与明星和商人们辩论到底明星万能还是不万能。但是，不用辩论

也知道：明星不可能既是万能的又不是万能的。如果明星是万能的，在产品出问题之后就应当追究明星们的责任。如果明星不是万能的，那就请不要相信明星的广告，在决定是否购买这些产品的时候独立作出自己的判断。如果你要坚决作明星的粉丝，相信他们是万能的，盲目购买他们作广告的产品，那就做好牺牲自己利益的准备，中了毒也自认倒霉。“明星不可能既是万能的又不是万能的。”这个简单道理不但可以用来说明明星做广告应当承担什么社会责任，也可以帮助我们理解看起来违背常理的非欧几何。

从中学的平面几何开始，学生学的就是欧几里得几何。其中有一条重要的公理：在平面上，过直线 a 外面一点 P，只能作一条与直线 a 不相交的直线 b。同一平面内这两条不相交的直线 a, b 称为相互平行。这个公理称为平行公理。由平行公理出发可以推出一系列几何定理，例如：三角形内角和等于平角（180度），等等。

欧几里得几何还有一些别的公理。例如，过平面上不同的两点可以并且只能作一条直线。这些公理的成立看起来都是显而易见的。但是，平行公理似乎显得复杂一些，不那么显然，似乎可以由别的显然成立的公理推导出来。于是，就有很多数学家试图用更显而易见的公理来证明平行公理。经过很多年的努力都没有成功。很自然，有些人尝试用反证法来证明平行公理。也就是：假定平行公理不成立，假定在平面上过直线 a 外面一点 P 可以至少作两条不同的直线 b, c 与 a 都不相交，试图由此推出矛盾。从这个假设出发，推出了很多看起来荒唐的结论。例如，三角形内角和小于 180 度，相似三角形必然全等，等等。曾经有很多人以为：既然否定平行公理之后推出了荒唐的结论，那就是证明了平行公理。其实这不对。什么叫做荒唐？他们所说的“荒唐”其实是按欧几里得几何为标准来作出的判断。比如，三角形内角和为什么一定是 180 度？小于 180 度为什么就是荒唐？其实，“三角形内角和等于 180 度”比“在平面上过直线 a 外一点 P 只能作一条直线 b 与 a 不相交”更不显然，凭什么就能用前者来证明后者的成立呢？如果否定平行公理之后能推出相互矛盾的结论，那就证明了平行公理的正确性。反之，否定平行公理之后推出的一大批看起来荒唐的结论相互不矛盾，可以自圆其说，这些“荒唐”结论就可以组成另外一个几何体系与欧几里得几何分庭抗礼。

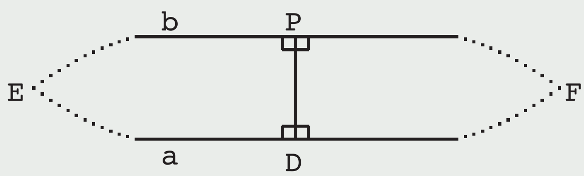
经过无数的失败，终于有人醒悟过来，意识到否定平行公理之后得到的一大批看起来荒唐的结论相互是不矛盾的。俄罗斯数学家罗巴切夫斯基首先在俄罗斯科学院做报告正式宣布了这一结论，由这些貌似荒唐却不矛盾的命题组成了一个新的几何体系，称为罗巴切夫斯基几何。也就是说：既可以假设平行公理成立，过平面上任意直线 a 之外一点 P 只能作一条直线与 a 不相交，由此推出一系列相互不矛盾的几何定理，组成欧几里得几何。也可以假设平行公理不成立，过平面上任意直线 a 之外一点 P 至少可以做两条不同的直线 b, c 与 a 都不相交，由此推出另外一系列相互不矛盾的几何定理，组成罗巴切夫斯基几何。这两种几何都没有矛盾，都可能正确，但不可能同时正确。到底哪一个正确，不能仅由逻辑推理来判定，需要在现实的宇宙空间中进行测量来判定。



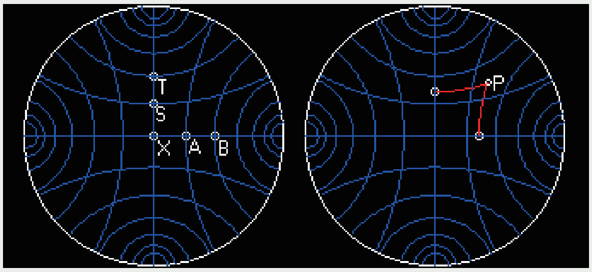
（非欧几何意义下的）双曲几何里的三角形

虽然人们没有在否定平行公理之后推出的一大批非欧几何定理之间发现矛盾，但没有发现矛盾不等于没有矛盾。有可能是因为地球人都不够聪明，所以没有发现矛盾，以后有可能从天上掉下个外星人发现矛盾。最好的办法是不要等待天上掉下外星人，而由地球人给出一个证明，说明否定平行公理之后得到的几何定理相互没有矛盾呢。这样的证明确实给出来了，但不是直接证明非欧几何定理之间没有矛盾，而是证明了：只要欧几里得几何没有矛盾，非欧几何就没有矛盾；如果非欧几何有矛盾，那么欧几里得几何也有矛盾。如果欧氏几何与非欧几何两者都有矛盾，就什么几何都没有了。我们只好同意两者都没有矛盾。

按照欧几里得几何，过平面上任一直线 a 之外一点 P 只能做一条直线 b 与 a 不相交。按照罗巴切夫斯



基几何，过 P 与 a 不相交的直线至少有两条，因而有无穷多条。在逻辑上，还应当有一种可能性：过 P 与 a 不相交的直线只有 0 条，根本就不存在。不过，可以证明直线 a 之外一点 P 至少有一条直线 b 与 a 不相交。证明方法是：过 P 作 a 的垂线 PD，如上图。再过 P 做 PD 的垂线 b。我们断定 b 与 a 不相交。若不然，设 b 与 a 有交点 E。将直线 a, b 关于直线 PD 做轴对称变换之后仍分别与 a, b 自身重合，而 a, b 的交点 E 则从 PD 的一侧变到另一侧成为 a, b 的另一公共点 F。a, b 是过两点 E,F 的两条不同直线，这与“过不同的两点 E、F 只能作一条直线”的公理相矛盾。为什么 E、F 一定是两个不同的点？这是因为它们分别位于直线 PD 的两侧。有一条公理说：任一条直线将平面分成两个不相交的部分。如果将这条公理也去掉，则直线 PD 两侧的 E、F 有可能是同一个点，就好比在地球上从中国往东和往西可以到达同一个地点，以上的证明就并没有推出矛盾。这就得到平行线的第三个公理：从平面上任一直线 a 之外一点 P 的每一条直线都与 a 相交。由这个公理推出的结论组成既不同于欧几里得又不同于罗巴切夫斯基几何——黎曼几何。黎曼几何并不奇怪：假如将地球表面看成平面，这个“平面”上任意两点 A, B 连成的最短线 (过 A, B 与球心所作平面与球面的交线) 看成直线，这它们满足平面与直线的相关公理，并且任何两条这样的“直线”都相交。



双曲几何里的坐标系

以上三种几何都没有矛盾，其中哪一个在现实的宇宙空间中成立？科学家们似乎更偏向于黎曼几何。不过，在小范围的宇宙空间中，罗巴切夫斯基几何与黎曼几何近似地等同于欧几里得几何，正如地球表面的球面在小范围内近似地等同于平面。这个“小范围内的宇宙空间”有多小？在太阳系甚至银河系范围内都不会有显著误差。生活在地球上的人们可以大胆使用欧几里得几何而不用担心有明显的误差。不过，这三种几何虽然是为研究几何空间发明出来的，却还可以用来描述很多别的事物。正如现实的空间虽然是三维的，四维或更高维数空间的几何和代数知识仍然可以用来研究现实世界中由 4 个或更多个参数决定的系统。

房价何时过千万？

——等比级数的中国故事

数学教材和科普读物，讲到等比数列的时候都喜欢讲一个故事：

印度一个聪明人为国王发明了国际象棋。国王非常高兴，问这位发明人想要什么奖赏。并且答应：“你要什么我就给什么。”发明人回答：“请按国际象棋的 64 个格子给我奖赏：第一个格子给我一粒麦子，第二格给两粒，第三格给 4 粒。依此类推，每个格子给我的麦粒数是前一个格子的两倍。64 个格子给完了，就是我所要的全部奖赏。”

国王想，他所要的麦子不多呀。从 1 粒麦子开始，实在很少。每次两倍，也不多。64 个格子也不算多。经过计算，这些麦子的总数 2^{64}-1 是一个 20 位的整数。这些麦子的总量比全世界生产的麦子都多，可以从地球一直堆到太阳。国王给不出这么多麦子。

这个故事的中心思想是要说明：随着指数 n 的增长，指数函数 2^n 的值增长得多么快。用这样一个有趣的故事来普及数学知识，当然很好。但这个故事讲了很多年了，老掉牙了，不新鲜了。而且是古代的外国的，离我们的生活太远。并且，我怀疑这并不是真人真事，可能只是古代外国的聪明人创作的一个虚拟故事，一个寓言，来说明指数增长的惊人速度。