

计算机正在改变数学

彭翁成 张景中

■ 计算机能否推理？

人不是机器。这句俗语通常是用来说明人需要休息，而机器则可以不眠不休地干下去。

把繁琐沉重的活交给机器，人可以解放出来做更富于创造性的工作。体力劳动如此，计算机出现后脑力劳动亦如此。

计算机科学技术迅速发展，机器的智能化程度越来越高。但你要是告诉别人计算机能解数学题，且所给的解法和人给出的解法相似甚至更简洁优美，这就很难让人相信了。世界上研究机器推理的一流学者，曾经普遍认为这是不可能的。

因为推理是人独有的高级智慧。

人通过推理，可以由此及彼，由表及里，去粗取精，去伪存真。

那么人到底能不能把智慧赋予给计算机呢？

计算机是人的学生。它的本领是人教的；它还是笨学生，不教不会。但它又是好学生，会牢牢记住你教给它的方法，一丝不苟地按你设计的程序去做。如果你循循善诱，它就能青出于蓝。

另一方面，计算机的发展，特别是机器证明的出现，给数学和哲学带来的影响是巨大而深刻的。

就拿中学数学来说吧。初中数学大致分为代数和几何两部分。代数问题的求解通常是比较规范的，按照一定的步骤依葫芦画瓢即可，关键是计算不出错；而几何则不同，难度稍大的题目，往往无从下手，好似羚羊挂角，无迹可寻。辅助线从何而来，要么是妙手偶得之，要么是千锤百炼得来。正因为如此，当古代托勒密王向欧几里德请教学习几何的捷径时，欧几里德直率地说：几何无王者之路！

计算机的发明，是为计算而来。不管计算机将来如何发展，如何智能化，高速的计算能力始终是计算机的根本。

为计算而发明的计算机，能够证明几何定理么？中国数学家在上个世纪 80 年代提出的例证法算是一种，因为计算量很大，大多数情况只能借助计算机来完成。除此之外，还有别的什么方法吗？答案是肯定的。用机器证明的数学定理中，最为人津津乐道的当属四色定理。

■ 四色定理的机器证明

四色定理最先是由一位叫古德里的英国大学生提出来的，而德·摩尔根 1852 年 10 月 23 日致数学家哈密顿的信中提供了有关四色定理来源的最原始记载。他在信中简述





“四色定理”示意图（左）；最早试图证明四色定理的摩尔根（Augustus De Morgan, 1806-1871）（右）

了自己证明四色定理的设想与感受。

四色问题的内容是：“任何一张地图只用四种颜色就能使具有共同边界的国家着上不同的颜色。”用数学语言表示，即“将平面任意地细分为不相重叠的区域，每一个区域总可以用1、2、3、4这四个数字之一来标记，而不会使相邻的两个区域有相同的数字。”

一百多年以来，虽然数学家们为证明这条定理绞尽脑汁，所引进的概念与方法刺激了拓扑学与图论的发展，但一直没有给出理论证明。

1976年，美国数学家阿佩尔与哈肯借助电子计算机，用了1200多个小时，作了上百亿次判断，终于完成了四色定理的证明，轰动全世界。美国为此发行了一枚纪念邮票，上面写着“四种颜色就够了”。

当一些数学家为这个高难度的定理得到解决而庆祝时，更多的数学家则是对计算机给出的证明表示质疑。质疑的理由有二：

一是对于相当多的定理证明，特别是那些被称为“下金蛋”的数学问题，最重要的意义不在于论证最终的真假，而是在求证过程中不断地发现新方法。

二是计算机凭借高速计算能力作出的所谓证明，数学家无法人工检验，谁知道中间会不会出错呢？

新事物的产生和发展，往往不是一帆风顺的。

在计算机还没发明的時候，就有数学家提出机器证明（设计一种机器代替人推理）的设想，遭到了很多数学家的反对。数学大师庞加莱认为：“你可以将牲畜赶到机器的前

端，机器将其宰杀后储存成罐头输出。难道你可以把定理的条件送到机器的前端，机器自动输出结论么？这实在是不可思议！”

而在四色定理机器证明之后，反对声仍然强烈。有评论认为：“机器证明破坏了数学的优美。一个好的数学证明应当像一首诗——而这纯粹是一本电话簿！”

普林斯顿数学教授约翰·康威在接受《纽约时报》采访时说：“我不喜欢它们（计算机证明），因为你感觉不知道究竟发生了什么。你不能从中获得任何新的见地。”

持这种观点的数学家不是个别的，他们认为：如果一个难题被一种新方法解决了，这是一件了不起的事情。但是如果解决的方案只是现存方法的反复使用，那只能证明解决者的聪明而已。这不利于数学的发展。

还有人指出：传统数学研究四色定理，虽未获得最终成功，但促进了某些数学分支的发展（主要是图论、拓扑等）；而机器证明四色定理结论是对的，又能咋样呢？只得到没有灵魂的空壳而已。因为四色定理本身的意义并不大。现在数学界普遍承认五色定理了，但世界上绝大多数的地图颜色都超过5种。因为除了考虑颜色种类最少，现实生活中还有其他的考虑。

但是，机器证明四色定理毕竟丰富了我们的知识。以不能产生新方法为理由就拒绝承认，是说不过去的。用机器作为数学研究的辅助工具，这本身就是新的方法。

从历史上看，工具对数学的发展有重大的影响。筹算和珠算无疑推进了位置记数法和相应的计算系统的发展；圆