



自然的奥秘：混沌与分形

谨以此文纪念混沌之祖庞加莱逝世一百周年

丁玖

“自然界的大书是以数学符号写的。”——伽利略

(一) 引子

2009年的春天，新的一期《美国数学会会刊》(Notices of the American Mathematical Society)刊登的一篇题为“鸟与青蛙”的文章吸引了全世界许许多多的读者。这是生在英国、年逾八旬的美国普林斯顿高等研究院教授戴森(Freeman Dyson, 1923-)应美国数学会之邀所作的上年度“爱因斯坦讲座”的讲演稿。这位在学术界备受尊敬的理论物理学家和数学家形象地描绘了近代自然科学发展四百年以来从十七世纪的英国人培根(Francis Bacon, 1561-1626)和法

国人笛卡儿(Rene Descartes, 1596-1650)到二十世纪的匈牙利人冯·诺依曼(John von Neumann, 1903-1957)和中国人杨振宁(1922-)等典型的两类学术巨匠：大鸟般的俯瞰大地者与巨蛙式的深入探究者。

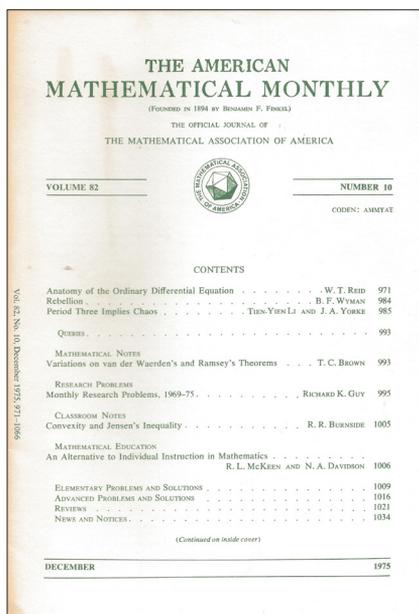
戴森在文章中描述了与那些“鸟”和“蛙”融为一体的几大学科，并不吝笔墨地用了近两页的篇幅来讨论混沌研究的发展。

戴森：“在混沌领域里，我仅知一条有严格证明的定理，是由李天岩和詹姆斯·约克在1975年发表的一篇短文‘周期三意味着混沌’中证明的。”

(In the field of chaos I know only one rigorous theorem, proved by Tien-Yien Li and Jim Yorke in 1975 and published in a short paper with the title, “Period Three Implies Chaos.”)正如约克后来在寄给同一杂志的“读者来信”中第一句所述，他和李天岩“欣喜地”读到戴森接下来的评语：

“李-约克论文是数学文献中不朽的珍品之一。”(The Li-Yorke paper is one of the immortal gems in the literature of mathematics.)

为什么在演讲稿中甚至对大数学家冯·诺依曼都颇有微辞的戴森对李天



刊登李-约克论文的那期《美国数学月刊》



戴森 (1923-)



上图: 约克 (1941-); 下图: 李天岩 (1945-)

岩-约克的那篇“immortal”论文情有独钟? 在这篇历史上第一次给予“混沌”这一普通名词之严格数学定义并在“混沌”、“分形”发展史上承前启后、继往开来的八页论文的背后, 是什么样的风云变幻与扑朔迷离?

如今, 混沌、分形的术语已在科学技术界家喻户晓。我们要追溯它们的历史, 就必须首先请时光倒流一百年, 去和被美国数学史家、1937年初版的名著《数学伟人传》(Men of Mathematics)的作者贝尔(Eric Temple Bell, 1883-1960)称为“最后的全能数学家”的昂利·庞加莱(Henri Poincaré, 1854-1912)来一番亲密接触。

(二)“三体问题”的困惑

真正意义上的现代物理科学大概是从意大利实验物理学家伽利略(Galileo Galilei, 1564-1642)著名的自由落体实验开始的。伽利略死后一年而生、“站在巨人肩膀上”的无与伦比的牛顿(Isaac Newton, 1643-1727)24岁前以“超过全人类的智能”, 集前人研究成果之大成, 提炼出他的“运

动三大定律”, 加上“万有引力定律”, 构成经典力学的大框架。“英国人的骄傲”牛顿和“德国人的宠儿”莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716)各自独立发明的微积分, 早已成为每一个理工科大学生的必修科目。

正如牛顿爵士的墓志铭上写着的, “他几乎神一般的思维力, 最先说明了行星的运动和图像、彗星的轨道和大海的潮汐。”质量已知、外力给定, 加上初始条件, 运动物体在任何时刻的空间位置就可被牛顿定律所确定。有谁不赞叹他天才思想的洞察、神工鬼斧的创造? 有谁不感谢他那颗智慧的大脑给我们的世界带来的亿万财富?

春夏秋冬、日复一日, 太阳每天从东方升起, 在西天落下, 钱塘江每年一次涨潮落潮的壮观景象周而复始。每一天, 当我们清晨早起, 迎着灿烂的阳光走向工厂、农场、机关、学校的时候, 我们会感到世界似乎是那么的有序, 一切如同牛顿力学的“决定论”哲学思想所描绘的那样。

可是, 无序无处不在。湍急的水流、物种的变异、股票的走向、心脏

的跳动, 甚至我们自己的喜怒哀乐, 等等等等, 无一不昭示着大自然和人类行为的随机性、不连续性、不稳定性这些不规则行为的方方面面。

对“世界有序”信条的第一次科学的挑战, 在十九世纪末拉开了帷幕。正如美国记者格莱克(James Gleick, 1954-)在1987年出版的畅销书《混沌》的第一章“序曲”中所说: “混沌开始之处, 就是经典科学终止之时。”

1885年, 瑞典和挪威国王奥斯卡二世(Oscar II, 1829-1907)为了庆祝他四年后的六十岁生日, 提供2500克朗有奖悬赏求解我们赖以生存的太阳、地球、月亮这三大天体在相互之间万有引力的作用下, 如果知道了在某个时刻它们的初始位置和初始运动, 在后来任意的时刻它们的位置和速度是什么样? 比如说, 在一万年之后? 这就是所谓的“三体问题”。两个物体的“二体问题”又叫做“开普勒(Johannes Kepler, 1571-1630)问题”, 它早在1710年就被约翰·伯努利(Johann Bernoulli, 1667-1748)首先解决了, 他是瑞士历史上最令人吃惊的伯努利

家族的代表人物之一，该家族前后一百年间的三代人中就出现了八位“青史留名”的数学家，约翰·伯努利是第一代两兄弟中的弟弟。但增加一个物体，难度的增加几乎是无穷大。

牛顿万有引力定律说，两个物体之间的相互吸引力跟物体质量的乘积成正比，跟它们之间距离的平方成反比。根据牛顿运动第二定律，物体运动的加速度乘上它自己的质量等于作用在该物体上的外力。加速度是物体运动速度的变化率，换句话说，它表示速度的变化有多快，而速度又是物体在空间中位置的变化率。一个变量的变化率就等于微积分中的“因变量关于自变量的导函数”，即所谓“函数的导数”。所以物体的加速度等于“物体的空间位置”这个函数关于“时间”这个自变量的“导数的导数”，即所谓的“二阶导数”。这样一来，由于每个物体在空间中的位置由它的三个笛卡儿坐标表示，“三体问题”对应于求解九个“二阶非线性微分方程”，并检查当时间愈来愈远时解的最终性态。可惜的是，方程组的解虽然存在，但没有办法可以写出它的具体表达式，就像大多数自然界的应用问题一样。

新的方法应运而生，它来自庞加莱那颗杰出的“水牛般的大脑袋”。

庞加莱曾被无产阶级革命导师和辩证唯物主义哲学家列宁半褒半贬为一个“伟大的科学家，渺小的哲学家”。但在第一次世界大战中，当对法国充满敌意的一位英国将军询问他的同胞、数学家和哲学家罗素（Bertrand Russell, 1872-1970）谁是法国现代最伟大的人物时，后者立刻答道：

“庞加莱。”

“什么？那个家伙？”将军以为罗素指的是法国的总统雷蒙·庞加莱（Raymond Poincare, 1860-1934）。

当罗素知道那人如此惊愕的原因后，笑了一笑：

“我想到的是雷蒙的堂哥，昂利·



庞加莱（1854-1912）

庞加莱。”

庞加莱是数学研究领域包括纯粹数学与应用数学的几乎所有方面的最后一位数学通才，并在物理学许多领域，包括相对论，多有建树。他对数学和科学哲学的见解和论述，几乎让所有其他科学家难以望其项背。他的科学普及读物，像《科学与方法》，是科学专业人士和普通老百姓在巴黎的咖啡馆或公园里的读本，一百多年来被翻译成西方和东方多种文字出版，影响了几代人的科学思维和方法。由于其优美的语言表达和科学方法论著作的文学成就，他被选为法兰西学院文学部院士，这是对科学界人士的独特荣誉。

庞加莱出生于法兰西一个既显赫又杰出的家族，在童年时就显示出超群绝伦的智力。但有趣的是，已经成为那个时代一流数学家的他曾经参加过以同时代法国心理学家比奈（Alfred Binet, 1857-1911）名字命名的智力测验，结果是：如果他被当作孩子的话，大概属于“低能儿”。他一生当中的主要娱乐是阅读，其读书的速度快得令人难以置信，并有着比瑞士的大数学家欧拉（Leonhard Euler, 1707-1783）



伯克霍夫（1884-1944）

更强的记忆力，这大概和他与生俱来的差视力有关。与一般人通常用眼睛帮助记忆不同，庞加莱几乎是靠耳朵，但与后来在一些国家中盛行的“耳朵识字”伪科学无关。事实上，在大学念书时，因看不见黑板上的字，他坐在后排听，不记笔记，只靠耳朵，非同寻常的记忆力派上了大用场。看来，近视眼的学生，大可不必花钱配眼镜，坐在课堂的后面听讲也许是锻炼记忆力的一大秘诀。

庞加莱 17 岁以第一名的成绩考入了法国著名的巴黎高工。他的数学天才技惊四座，别人的数学难题一告诉他，“答案就像一支箭似地飞了出来。”但他不善体育，绘画入学考试零分，差点被拒绝在校门之外，就像中国的大学者钱钟书（1910-1998）当初报考清华大学时那样。

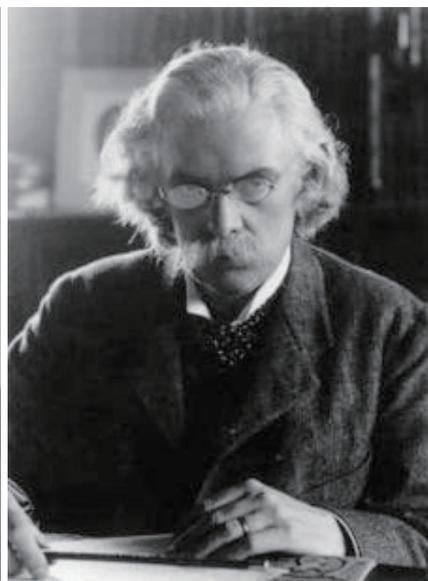
从 1878 年提交数学博士论文给巴黎的法国科学院，到他 1912 年因病辞世，庞加莱在他不长的 34 年学术生涯中留给全人类近 500 篇数学论文和 30 多本覆盖数学、物理和天文等众多学科的著作，还不包括那些科学哲学的名著和为大众撰写的通俗文章。他去世前不久发表了他未能证明的一生中



魏尔斯特拉斯 (1815-1897)



埃尔米特 (1822-1901)



米塔-列夫勒 (1846-1927)

最后一个重要定理，给后来者提出了前景美好的新的重要问题。这条与三体问题也有关系的所谓“庞加莱最后的几何定理”很快就被一名后起之秀、年轻的美国数学家伯克霍夫 (George David Birkhoff, 1884-1944) 证明。为他一生画上句号的这条漂亮定理大意是说，如果你保持面积地双向扭曲一个像只垫圈的环形区域，让圆形的外边和内边分别按顺时针和逆时针方向旋转，则圆环中至少有两个点“不为扭曲所动”。

1889年，庞加莱提交了他对三体问题的研究以及由此而生的对微分方程的一般讨论。这个理论不同于传统的那个只要求出方程解公式的定量理论，而是探讨其表达式求不出的解的种种性质。虽然他未能完全解决三体问题，却在求解过程之中以及他生命的最后十年创立了“组合拓扑学”或“代数拓扑学”这一新学科。由当时健在的三个顶尖数学家，分别为德国人、法国人和瑞典人的魏尔斯特拉斯 (Karl Weierstrass, 1815-1897)、埃尔米特 (Charles Hermite, 1822-1901) 和米塔-列夫勒 (Magnus Gosta Mittag-

Leffler, 1846-1927) 组成的评奖委员会决定授于他奥斯卡国王的这一奖金。

魏尔斯特拉斯在写给米塔-列夫勒的评奖报告中赞美道，庞加莱的工作“是非常重要的，它的发表将在天体力学史上开创一个新的时代”。

但是，庞加莱获奖工作的基本假设是“同宿点不存在”。所谓的同宿点是关于一个不动点的稳定流形和不稳定流形在别处相遇的一个点。他起初认定这两个流形在别处不相遇，天下因此太平，大家都很高兴，他也拿到了2500克朗的奖金。

那一年的冬季，庞加莱的获奖论文开始印刷，准备发行。一名数学家和庞加莱本人在校对样稿时都发现了其中的一些地方证明不太清楚。认真负责的庞加莱开始全力以赴地修改这些部分，并且通知杂志的主编收回了已经印出的杂志予以销毁。他还主动自掏腰包地付了3585克郎，赔偿出版社的经济损失。这就是说，除了贴上他的奖金，他还倒赔了一千多克郎。但这个小损失，换来了人类的大进步。修改后的文章增加了将近三分之一的篇幅。正是这次修改导致了

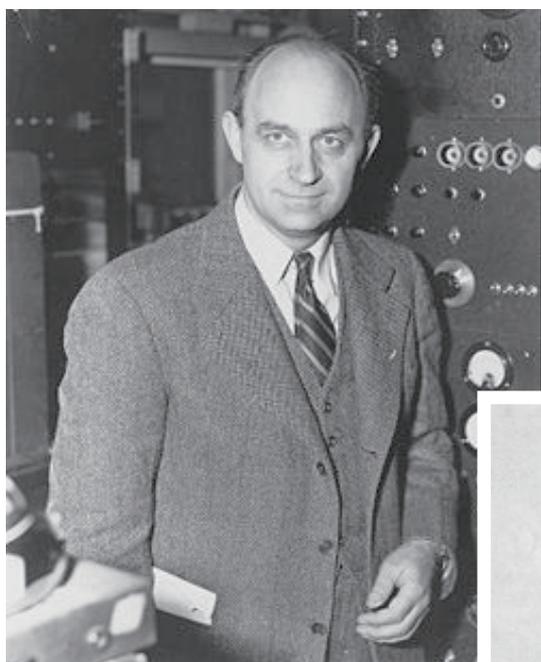
对“同宿点可能存在”的伟大发现。

最终，庞加莱的这篇长达270页的论文“关于三体问题的动力学方程”于1890年10月在瑞典领头数学家米塔-列夫勒所创办的《数学杂志》(Acta Mathematica)上发表。从此，他一不做二不休，乘胜前进，自1892年到1899年一口气地撰写了三大卷充满新思想的宏伟巨著《天体力学的新方法》。

庞加莱首先证明了三体问题不像二体问题，不可能通过发现各种“不变量”来把问题化繁为简以获得解析解，这就让他那代的数学家们想找到三体问题显式解的梦想破灭，彻底地重塑人们研究微分方程的基本想法。

更为重要的是庞加莱发现，三体问题微分方程组的稳定流形和不稳定流形由于相交而产生同宿点，因此引起方程的一般解在某些区域具有异常复杂的状况，以至于对于给定的初始条件，几乎是无能为力来预测当时时间趋于无穷大时，这个解曲线的最终命运。

庞加莱对找不到解的解析表达式的微分方程解的一般理论，导致了用几何和拓扑方法研究微分方程解的定性理论的诞生。这门学问现在被纳入



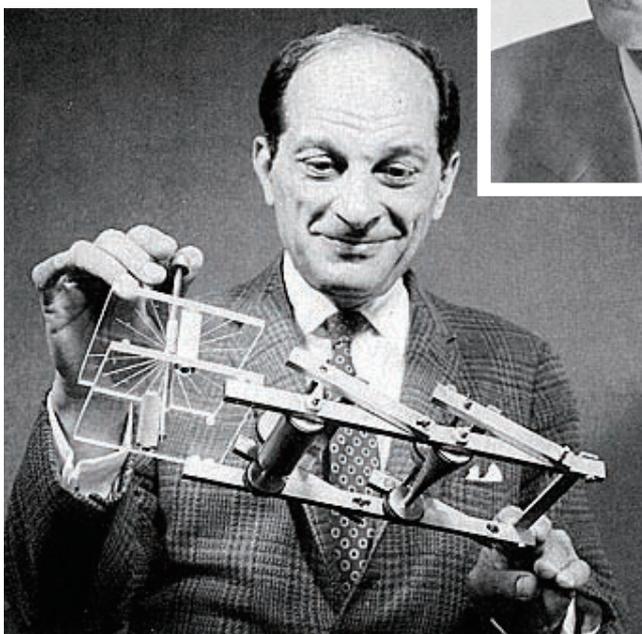
费米 (1901-1954)



特勒 (1908-2003)



奥本海默 (1904-1967)



乌拉姆 (1909-1984)



费恩曼 (1918-1988)

称之为动力系统的大范畴。他在研究天体运动的三体问题时已经清楚地知道它的解对初始条件的“敏感依赖性”，以及解的最终性态的“不可预测性”。可以说，他是人类历史上懂得自然界

混沌可能性的第一人。

今天，即便是学过非线性微分方程初级理论的大学高年级学生也已知晓，混沌可以出现在看上去很简单的双摆运动之中。为什么高中物理或大

学普通物理课的老师并没有告诉这一事实？也许他们也被伽利略或荷兰大物理学家惠更斯（Christiaan Huygens, 1629-1695）这样的先知先觉所误导。我们高中第一学期曾经学过的没有阻