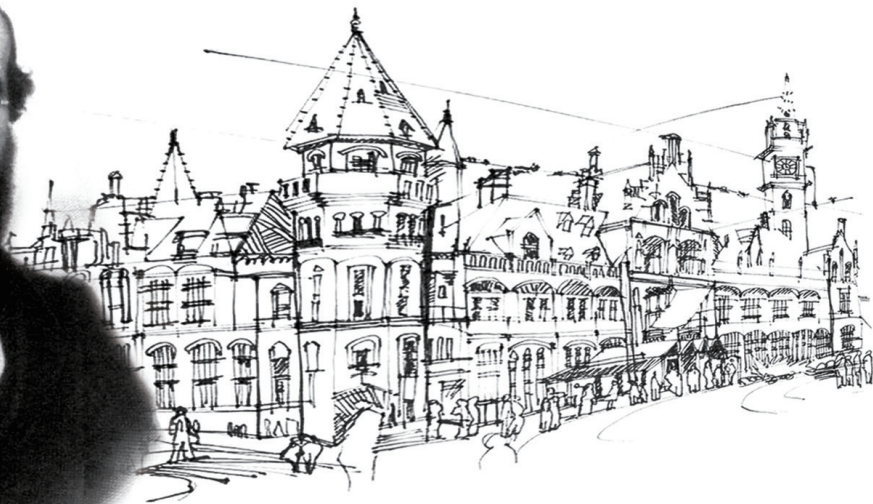


Riemann



## 黎曼猜想漫谈(四)

卢昌海

### 17 茶室邂逅

蒙哥马利 (Hugh Montgomery) 虽然得到了有关黎曼 $\zeta$ 函数非平凡零点对关联函数的猜测性结果, 但这一结果究竟有何深意, 对他来说还是一个谜。他觉得这个结果应该预示着什么东西, 可那究竟是什么呢? 他并不知道, 这多少让他感到有些苦恼。

带着他的研究成果, 也带着那几分苦恼, 蒙哥马利于 1972 年春天飞往美国圣路易 (St. Louis) 参加一个解析数论会议。那趟旅行对蒙哥马利有着一举数得的意义。除会议本身外, 他还到密歇根大学 (University of Michigan) 所在地安娜堡 (Ann Arbor) 买了房子, 因为此前不久他已接受了一份密歇根大学的工作 (蒙哥马利目前仍在密歇根大学数学系)。

至此, 那趟旅行可以说已经获得了精神与物质的双重丰收。但在结束旅程前蒙哥马利还有一件事情放心不下。

我们在第三节曾经提到高斯有一个“坏毛病”, 那就是常常不发表自己的工作, 结果使得同时代的许多数学家在研究课题上与他“撞车”(与高斯这样的大师玩碰碰车, 谁的脑袋先碰破就不必说了)。无独有偶, 二十世纪的普林斯顿高等研究所也出了一位有同样“坏毛病”的数学家, 那便是阿特勒·塞尔伯格 (Atle Selberg, 1917-2007)。塞尔伯格在黎曼猜想的研究中有着极为重要的地位, 我们在后文中将会更多地介绍他, 这里就不赘述了。让蒙哥马利放心不下的就是自己会不会与塞尔伯格“撞

## Riemann



普林斯顿高等研究所 Fuld Hall (刘建亚 摄)

车”？自己的这项研究工作会不会不幸地在塞尔伯格的某一叠草稿纸上已经有了？当然，除此之外他也很想听听这位黎曼猜想研究中的顶尖高手对自己这项工作的看法，特别是对结果背后含义的理解。

于是在返回英国前他决定在普林斯顿高等研究所做短暂的停留，以便会见一下塞尔伯格。

蒙哥马利如愿见到了塞尔伯格。但塞尔伯格听完了蒙哥马利的介绍只是礼貌地表示了兴趣，却没有提出具体意见。不过他总算也没有说：“干得不错，小伙子，但是  $N$  年之前我已经证明过这样的结果了”，还是让蒙哥马利松了一口气。

见到了塞尔伯格，蒙哥马利便和朋友周拉 (Sarvadaman Chowla, 1907-1995) 到 Fuld Hall 去喝下午茶。喝下午茶虽是一种休闲，但在普林斯顿高等研究所的学术氛围中却是一个重要的组成部分。在这一时间里，来自世界各地、从事不同研究的学者们互相攀谈，交流看法，往往会撞击出一些意想不到的智慧火花。

蒙哥马利和周拉正在喝茶闲聊的时候，一位物

理学家走了进来。

在普林斯顿高等研究所这样一个科学家阵容豪华得近乎奢侈的地方，随便哪个角落碰上的都可能是非同小可的人物。这位漫步走进茶室的物理学家也不例外。此人在二十世纪中叶曾因证明了量子电动力学的几种形式体系彼此等价，而获得了很高的声誉，也为他赢得了普林斯顿高等研究所的终生职位。而这项研究还只不过是他的科学生涯中许许多多研究中的一个。他的研究涉及到核物理、凝聚态物理、天体物理，乃至天体生物学等诸多领域。这位物理学家便是弗里曼·戴森 (Freeman Dyson, 1923-)。在二十世纪物理殿堂的璀璨群星中戴森当然远不是最杰出的，但那个午后他和蒙哥马利的世界线在高等研究所的短暂交汇，却是科学史上一段令人难忘的佳话，对于黎曼猜想的研究来说也是一个奇峰突起的精彩篇章。

周拉是一位交际高手，一边和蒙哥马利喝茶聊天，一边仍能眼观六路、耳听八方。戴森刚一进门就被他发现了，于是他问蒙哥马利是否见过戴森，蒙哥马利说没有，周拉就说我给你引见一下。蒙哥



## Riemann



蒙特哥麦利  
Hugh Montgomery



塞尔伯格  
Atle Selberg



戴森  
Freeman Dyson

马利心想自己做的东西和戴森八杆子都打不着，再说喝完茶就走人了，何必还特意打扰戴森？就说不必了。但周拉却是一个从来不把“不”字当成答案的家伙，当下二话不说就把蒙哥马利拽到了戴森跟前（谢谢周拉！）。

就这样戴森和蒙哥马利攀谈了起来。戴森问蒙哥马利最近在研究什么？蒙哥马利就把自己对黎曼 $\zeta$ 函数非平凡零点分布的研究叙述了一下。戴森礼貌地听着，他对这一领域并不熟悉。连塞尔伯格都没有发表具体的看法，蒙哥马利也并不指望这番泛泛介绍会得到比礼貌地点点头更多的回应。

但是当他介绍到自己所猜测的密度函数  $\rho(t) = 1 - [\sin(\pi t)/\pi t]^2$ （详见第十六节）时，戴森的眼睛猛地睁大了！

因为这个让蒙哥马利找不到北，甚至连塞尔伯格也看不出端倪来的密度函数对戴森来说却一点也不陌生，那正是随机厄密特矩阵 (Random Hermitian matrices) 本征值的对关联函数。物理学家们研究这类东西已经有二十年了！

而戴森本人也早在十年前就系统地研究了随机矩阵理论，是这一领域公认的先驱者之一。即使找遍整个世界，也不可能找到一个比戴森更合适的人

来和蒙哥马利共喝那杯下午茶了。他们的相遇本身就是一个幸运的奇迹。

有意思的是，在与蒙哥马利的这次“茶室邂逅”的前一年（即 1972 年），戴森刚写过一篇题为“Missed Opportunity”（“错过的机会”）的文章，叙述了科学史上由于数学家与物理学家交流不够而错失发现的一些事例。

## 18 随机矩阵理论

身为理论物理学家的戴森如何会研究起随机矩阵理论来的呢？这当然还得从物理学说起。

我们知道在物理学上可以严格求解的问题是少之又少的。而且物理理论越发展，可以严格求解的问题就越少。举个例子来说，在牛顿引力理论中二体问题可以严格求解，但一般的三体问题就不行 [注 18.1]；到了广义相对论中连一般的二体问题也解

### 注 18.1

这里“单体”、“二体”、“三体”指的都是点状分布或可视为点状分布的体系。

# Riemann

不出了，只有单体问题还可以严格求解；而到了量子场论中更是连单体问题也解不成了。

另一方面，现实物理中的体系往往既不是单体，也不是二体或三体，而是多体，少则十几、几十（比如大一点的原子、分子），多则  $10^{23}$  或更多（比如宏观体系）。很明显，对现实物理体系的研究离不开各种近似方法。这其中很重要的一类方法就是统计方法，由此形成了物理学的一个重要分支：统计物理。

在统计物理中，人们不再着眼于对物理体系的微观状态进行细致描述（因为这种细致描述不仅无法做到，而且对于确定体系的宏观行为来说是完全不必要的），取而代之的是“系综”的概念。所谓“系综”，指的是满足一定宏观约束条件的大量全同体系的集合，这些体系的微观状态具有一定的统计分布，我们感兴趣的体系的宏观状态就由相应物理量的系综平均值所给出。

在传统的统计物理中，组成系综的那些全同体系具有相同的哈密顿量 (Hamiltonian)，只有它们的微观状态才是随机的。但是随着研究的深入，物理学家们开始接触到一些连这种方法也无法处理的物理体系，其中一个典型的例子就是由大量质子中子组成的原子核。这种体系的相互作用具备了所有可以想象得到的“坏品质”（比如耦合常数很大，不是二体相互作用，不是有心相互作用等），简直是“五毒俱全”。对于这种体系，我们甚至连它的哈密顿量是什么都无法确定。这样的体系该如何处理呢？很显然还是离不开统计的方法。只不过以前在系综中只有各体系的微观状态是随机的，现在却连哈密顿量也不知道了，既然如此，那就一不做二不休，干脆把哈密顿量也一并随机化了。由于哈密顿量可以用矩阵来表示，因此这种带有随机哈密顿量的量子统计系综可以用随机矩阵理论来描述。这一点最早是由尤金·维格纳 (Eugene Wigner, 1902-1995) 于 1951 年提出的。当然，在这一领域中数学家还是要先于物理学家。随机矩阵理论在数学中最早是由威沙特 (J. Wishart, 1898-1956) 于 1928 年提出的。

把哈密顿量随机化不等于说对哈密顿量的结构就没有任何限制了。二十世纪六十年代初，与蒙哥

马利在茶室里偶遇的这位戴森对随机矩阵理论进行了深入的研究，并在 1962 年一连发表了五篇非常漂亮的论文。这些论文在随机矩阵理论的发展中具有奠基性的作用。在这些论文中戴森证明了随机矩阵理论可以按照体系在时间反演变换  $T$  下的性质分为三种类型：

- 如果体系不具有时间反演不变性，则演化算符为幺正矩阵 (Unitary Matrices)。
- 如果体系具有时间反演不变性，且  $T^2 = I$ ，则演化算符为正交矩阵 (Orthogonal Matrices)。
- 如果体系具有时间反演不变性，且  $T^2 = -I$ ，则演化算符为辛矩阵 (Symplectic Matrices)。

这里戴森用演化算符  $U$  取代了哈密顿量  $H$ ，这两者之间由  $U = \exp(-iHt)$  相联系。用演化算符的好处是它的参数空间是紧致的。

除了按照对称性对演化算符的结构进行分类外，还有一个需要解决的问题就是哈密顿量的分布函数。戴森引进的是高斯型分布，这是数学物理中比较常见的一种分布。在这种分布下具有上述三种对称性的系综分别被称为：Gaussian Unitary Ensemble (GUE)，Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE) 和 Gaussian Symplectic Ensemble (GSE)。

戴森在得知了蒙哥马利的密度函数时猛然想起的“随机厄密矩阵”所描述的正是这三种系综中的一种——Gaussian Unitary Ensemble——的哈密顿量（幺正演化算符对应的哈密顿量是厄密的），它的几率测度定义为高斯型分布：

$$P(H)dH = C \exp\left(-\frac{\text{tr}(H^2)}{2\sigma^2}\right)dH,$$

其中  $C$  为归一化常数， $H$  为体系的哈密顿量， $\sigma$  为标准差，通常取为  $2^{-1/2}$ 。

对于一个量子体系，能级分布是在理论与观测上都极其重要的性质。这也是随机矩阵理论中物理学家们最感兴趣的东西之一。物理学家所说的能级用数学术语来说就是哈密顿量的本征值。那么随机厄密矩阵的本征值是怎样分布的呢？分析表明，一个  $N$  阶随机厄密矩阵的本征值分布密度为：

# Riemann

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = C \exp\left(-\sum_i \lambda_i^2\right) \prod_{j>k} (\lambda_j - \lambda_k)^2,$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  为本征值,  $C$  为归一化常数。

通过对这一分布密度的积分, 我们可以计算出随机厄密矩阵本征值的各种关联函数。但是这些关联函数的表现复杂程度与本征值的平均间距有很大关系, 因此我们要先对本征值做一点处理, 以便简化结果。这一处理所依据的是维格纳曾经证明过的一个结果, 那就是当矩阵阶数  $N \rightarrow \infty$  时,  $n$  阶随机厄密矩阵的本征值趋向于区间  $[-2(2n)^{1/2}, 2(2n)^{1/2}]$  上的半圆状分布, 即

$$P(\lambda) d\lambda = \sqrt{8n - \lambda^2} \frac{d\lambda}{4\pi},$$

其中  $P(\lambda) d\lambda$  为区间  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$  上的本征值个数。这一规律被称为维格纳半圆律 (Wigner Semicircle Law)。利用这一规律, 我们可以对本征值做一个标度变换, 引进

$$\mu = \frac{\lambda \sqrt{8n - \lambda^2}}{4\pi},$$

可以证明 (请读者自己证明), 这一变换就象我们在第十六节中对黎曼  $\zeta$  函数零点虚部所做的处理那样, 将本征值的间距归一化为:  $\Delta \mu \sim 1$ 。在这种间距归一化的本征值下, 关联函数的形式变得相对简单, 其中对关联函数的计算结果为:

$$P_2(\mu_1, \mu_2) = 1 - \left( \frac{\sin(\pi|\mu_2 - \mu_1|)}{\pi|\mu_2 - \mu_1|} \right)^2.$$

看到这里, 大家想必也和戴森一样看出来, 随机厄密矩阵本征值的对关联函数正是我们在第十六节中介绍过的, 蒙哥马利所猜测的黎曼  $\zeta$  函数非平凡零点的对关联函数! 当然那时候蒙哥马利用的不是象“对关联函数”这样摩登的术语, 事实上“对关联函数”这一术语蒙哥马利在和戴森交谈前连听都没听说过, 他自己用的是象“我正在研究零点间距”这样土得掉渣的“白话文”。

有的读者可能会提出这样一个问题, 那就是哈密顿量的分布为什么要选择成高斯型分布? 对于这

个问题, 实用主义的回答是: 高斯型分布是数学上比较容易处理的 (不要小看这样的理由, 当问题复杂到一定程度时这种理由有时是最具压倒性的); 稍为深刻一点的回答则是: 高斯型分布在固定的  $|H|_2$  系综平均值及标准差下具有最大的熵, 换句话说它描述的是在一定约束下具有最大随机性的体系; 但是最深刻的回答却是: 我们其实并不需要特意选择高斯型分布! 随机矩阵理论的一个非常引人注目的特点便是: 在矩阵阶数  $N \rightarrow \infty$  的极限下它的本征值分布具有普适性 (即不依赖于哈密顿量的特定分布)。正是这种普适性使得随机矩阵理论在从复杂量子体系的能级分布到无序介质中的波动现象, 从神经网络系统到量子混沌, 从  $N_c \rightarrow \infty$  的 QCD 到二维量子引力的极为广阔的领域中都得到了应用。

但是把随机矩阵理论的所有这些不同尺度、不同维度的应用加在一起, 也比不上它与黎曼  $\zeta$  函数非平凡零点分布之间的关联来得神奇。蒙哥马利曾经为不知道自己的结果预示着什么而苦恼, 现在他知道了那样的结果也出现在由随机矩阵理论所描述的一系列物理现象中。

但这与其说是解惑, 不如说是一种更大的困惑。象黎曼  $\zeta$  函数非平凡零点分布这样最纯粹的数学性质, 怎么会与象复杂量子体系、无序介质那样最现实的物理现象扯上关系的呢? 这种神奇的关联本身又预示着什么呢?

## 1.9 Montgomery-Odluzko 定律

蒙哥马利关于黎曼  $\zeta$  函数非平凡零点分布的论文于 1973 年发表在美国数学学会的 Proc. Sym. Pure Math. 上。但最初几年里它并不曾吸引多少眼球, 因为无论这种存在于零点分布与随机矩阵理论间的关联有多奇妙, 在当时它还只是一个纯粹的猜测, 既没有严格的数学证明, 也没有直接的数值证据。我们曾在第十三、十四节中介绍过零点计算的简史。在蒙哥马利的论文发表之初, 人们对零点的计算还只进行到几百万个, 而且——如我们在第十五节中所说——那些计算大都只是验证了“前  $N$  个零点”位于 critical line 上, 却不曾涉及零点的