



在此领域做出重要贡献的学者：陶哲轩（右），E Candes（左上），David Donoho（左下）

压缩感知

木遥

压缩感知是近年来极为热门的研究前沿，在若干应用领域中都引起瞩目。关于这个题目，松鼠会已经翻译了两篇文章，一篇来自于压缩感知技术最初的研究者陶哲轩，一篇来自威斯康辛大学的数学家艾伦伯格（见本文后面的链接）。这两篇文章都是普及性的，但是由于作者是专业的研究人员，所以事实上行文仍然偏于晦涩。因此我不揣冒昧，在这里附上一个画蛇添足的导读，以帮助更多的读者更好地了解这个新颖的研究领域在理论和实践上的意义。

压缩感知从字面上看起来，好像是数据压缩的意思，而实则出于完全不同的考虑。经典的数据压缩技术，无论是音频压缩（例如 mp3），图像压缩（例如 jpeg），视频压

缩（mpeg），还是一般的编码压缩（zip），都是从数据本身的特性出发，寻找并剔除数据中隐含的冗余度，从而达到压缩的目的。这样的压缩有两个特点：第一、它是发生在数据已经被完整采集到之后；第二、它本身需要复杂的算法来完成。相较而言，解码过程反而在计算上比较简单，以音频压缩为例，压制一个 mp3 文件的计算量远大于播放（即解压缩）一个 mp3 文件的计算量。

稍加思量就会发现，这种压缩和解压缩的不对称性正好同人们的需求是相反的。在大多数情况下，采集并处理数据的设备，往往是廉价、省电、计算能力较低的便携设备，例如傻瓜相机、或者录音笔、或者遥控监视器等等。而负责

处理（即解压缩）信息的过程却反而往往在大型计算机上进行，它有更高的计算能力，也常常没有便携和省电的要求。也就是说，我们是在用廉价节能的设备来处理复杂的计算任务，而用大型高效的设备处理相对简单的计算任务。这一矛盾在某些情况下甚至会更为尖锐，例如在野外作业或者军事作业的场所，采集数据的设备往往暴露在自然环境之中，随时可能失去能源供给或者甚至部分丧失性能，在这种情况下，传统的数据采集 - 压缩 - 传输 - 解压缩的模式就基本上失效了。

压缩感知的概念就是为了解决这样的矛盾而产生的。既然采集数据之后反正要压缩掉其中的冗余度，而这个压缩过程又相对来说比较困难，那么我们为什么不直接「采集」压缩后的数据？这样采集的任务要轻得多，而且还省去了压缩的麻烦。这就是所谓的「压缩感知」，也就是说，直接感知压缩了的信息。

可是这看起来是不可能的事情。因为压缩后的数据并不是压缩前的数据的一个子集，并不是说，本来有照相机的感光器上有一千万个像素，扔掉其中八百万个，剩下的两百万个采集到的就是压缩后的图像，这样只能采集到不完整的一小块图像，有些信息被永远的丢失了而且不可能被恢复。如果要想采集很少一部分数据并且指望从这些少量数据中「解压缩」出大量信息，就需要保证：第一：这些少量的采集到的数据包含了原信号的全局信息，第二：存在一种算法能够从这些少量的数据中还原出原先的信息来。

有趣的是，在某些特定的场合，上述第一件事情是自动得到满足的。最典型的例子就是医学图像成像，例如断层扫描（CT）技术和核磁共振（MRI）技术。对这两种技术稍有了解的人都知道，这两种成像技术中，仪器所采集到的都不是直接的图像像素，而是图像经历过全局傅立叶变换后的数据。也就是说，每一个单独的数据都在某种程度上包含了全图像的信息。在这种情况下，去掉一部分采集到的数据并不会导致一部分图像信息永久的丢失（它们仍旧被包含在其它数据里）。这正是我们想要的情况。

上述第二件事就要归功于陶哲轩和坎迪斯几年前的工作了。他们的工作指出，如果假定信号（无论是图像还是声音还是其他别的种类的信号）满足某种特定的「稀疏性」，那么从这些少量的测量数据中，确实有可能还原出原始的较大的信号来，其中所需要的计算部分是一个复杂的迭代优化过程，即所谓的「L1-最小化」算法。

把上述两件事情放在一起，我们就能看到这种模式的优点所在。它意味着：我们可以在采集数据的时候只简单采集一部分数据（「压缩感知」），然后把复杂的部分交给数据还原的这一端来做，正好匹配了我们期望的格局。在医学图像领域里，这个方案特别有好处，因为采集数据的过程往往

是对病人带来很大麻烦甚至身体伤害的过程。以 X 光断层扫描为例，众所周知 X 光辐射会对病人造成身体损害，而「压缩感知」就意味着我们可以用比经典方法少得多的辐射剂量来进行数据采集，这在医学上的意义是不言而喻的。

这一思路可以扩展到很多领域。在大量的实际问题中，我们倾向于尽量少地采集数据，或者由于客观条件所限不得不采集不完整的数据。如果这些数据和我们所希望重建的信息之间有某种全局性的变换关系，并且我们预先知道那些信息满足某种稀疏性条件，就总可以试着用类似的方式从比较少的数据中还原出比较多的信号来。到今天为止，这样的研究已经拓展地非常广泛了。

但是同样需要说明的是，这样的做法在不同的应用领域里并不总能满足上面所描述的两个条件。有的时候，第一个条件（也就是说测量到的数据包含信号的全局信息）无法得到满足，例如最传统的摄影问题，每个感光元件所感知到的都只是一小块图像而不是什么全局信息，这是由照相机的物理性质决定的。为了解决这个问题，美国莱斯（Rice）大学的一部分科学家正在试图开发一种新的摄影装置（被称为「单像素照相机」），争取用尽量少的感光元件实现尽量高分辨率的摄影。有的时候，第二个条件（也就是说有数学方法保证能够从不完整的数据中还原出信号）无法得到满足。这种时候，实践就走在了理论前面。人们已经可以在算法上实现很多数据重建的过程，但是相应的理论分析却成为了留在数学家面前的课题。

但是无论如何，压缩感知所代表的基本思路：从尽量少的数据中提取尽量多的信息，毫无疑问是一种有着极大理论和应用前景的想法。它是传统信息论的一个延伸，但是又超越了传统的压缩理论，成为了一门崭新的子分支。它从诞生之日起到现在不过五年时间，其影响却已经席卷了大半个应用科学。

作者介绍：

木遥，北京大学数学系本科毕业，美国加州大学洛杉矶分校数学博士。是本刊特约撰稿人。

