

入门须引路 功夫法自修

——王元院士谈数学教学

蒋文燕

编者按：王元院士是国际知名数学家，他在数学的诸多领域中都做出了杰出的贡献。他开创了中国在哥德巴赫猜想“ $a+b$ ”命题研究上的先河，他与华罗庚先生共同提出计算高维数值积分的方法，国外称为“华—王方法”。王元先生还曾担任中国数学会理事长，积极推动中国数学的整体发展。几十年的学术生涯，使他对于数学、教育、社会和人生都有深刻的见解。我们特邀蒋文燕博士对王元先生进行了深度采访。

蒋文燕于2002年在北京大学中文系获得博士学位，同年任教于北京外国语大学中文学院，目前在匈牙利罗兰大学孔子学院担任中方院长。蒋文燕博士从数学圈外人的角度，就数学教育等问题向王元先生请教，谈话的内容相信对于读者会很有启发。

与王元院士的交谈实际上是从2009年秋天陆续开始的。当时元老在晨兴数学中心领导着一个“数论讨论班”，每周六早上九点他都会准时开讲。我完全是数学的门外汉，在旁听的那一个多小时的时间里，元老所讲的与其他数学家所讨论的东西对我来说无疑形同天书。我诧异和感动的，是元老讲课时的体态神情。他的眼神炯炯，带着笑意；字迹娟秀，透着童心。而且无论是自己讲课，还是与人讨论，元老都面带笑容，或颌首微笑，或会心大笑，那股子精神气让人很难相信



他是一位八十岁的老人，一年多前还动过大手术。

在元老完成授课和讨论后，他会提前告退，由我陪着他走回家。一路上，我们穿过宝马来与三轮车并驰的街道。过马路时，我扶着元老，心里却多少有些紧张，在我所见，没有车辆会为这样一位身躯瘦弱、衣着朴素的老人稍稍减缓车速。而元老判断过马路的时机却比我坚定，他果断又慎重地走走或停停，穿行在这片已经走了五十八年的街区。

天气好时，我们会在途中的“新科祥园”小区坐一会儿。元老说他常在这里休息。在秋天温暖阳光的照耀下，看着眼前玩耍的孩童，聆听元老的谈话是极令人享受的时光。他谈到

令他尊敬的师长，“中国的数学家中，华罗庚先生是比较特别的。他的工作特点有两条，一是深刻，在上个世纪三四十年代，中国人对数学的理解还比较肤浅，而华老搞解析数论比一般的东西要深刻很多，所以他的工作持久性就比较强。二是华老的解析数论已经搞得很好了，但他可以把它抛开，重新来起，这是了不起的。”在元老看来，中国没有第二个数学家能像华罗庚先生这样，这一转变也使得华罗庚先生成为一个全面的数学家，而这对元老自己年轻时专业方向的改变也曾产生过积极的影响。在年轻的数学家中，元老赞赏张寿武的独立性，“我不赞成学生跟在老师的后面做文章，最好连我的书也不要读，他一定要自己去做。”在元老看来，身为老师，应该给学生一个宽松自由的环境，“高素质的人才都是自己奋斗出来的”。而元老谈得最多的，是希望年轻的数学家们不要读死书，死读书，一定要去做问题，无论大小，一定要去做。

这样每周一次的聆听与交谈，一直持续到2009年初冬几场雪后。正式的采访分两次在元老的办公室进行。初进元老的办公室时，我诧异于他办公室的狭小和简朴，“元老，您的办公室还没有大学里某个学院院长的大。”

“院士不是官啊。”元老平静地说。

蒋文燕（以下简称蒋）：元老，因为有关您的数学研究工作已经有许



1930年，王元与母亲



1937年，王元与家人，第二排中间为王元，三排中间为祖母，后排右二为父亲，三排右为母亲

多文章谈过了，所以这次我想主要请您谈谈您对数学教学的认识。

王元：好的。

蒋：您曾在《我的数学生活》（见王元：《王元论哥德巴赫猜想》，山东教育出版社，1999年）一文中提到，在浙江大学读书时，大三您参加了陈建功、苏步青两位数学大师组织的学生数学讨论班，在讨论班上您报告过英革姆（Ingham）的《素数分布理论》，陈老、苏老在讨论班上是如何指导学生的？这样一种研讲方式对您日后的学习、研究产生了什么样的影响？

王元：我是1949年进浙大的，1951年的下学期和52年的上学期参加了这个读书班，1952年的夏天就毕业了。我到浙大去的时候是1949年底，在那之前在英士大学，是一所比较普通的大学，后来解放以后这个学校被合并到浙大，所以就到浙大去读书。这个研究班是浙江大学数学系的一个特点，很有它的特色。

现在的大学教育都跟幼儿园的教育有点儿像，老师在上面讲，学生在下面记笔记，参加考试。所谓的读书班是一个自学，自学有什么好处呢？

就是普通的大学生毕业以后没有老师再教他了，统统要自学，如果你在学校里面已经养成一点自学的习惯，毕业以后就方便多了，自学是很自然的事情，所以就不需要经过一个转变，就会自学了。做研究之前都要自学，因为要找文献，如果你在大学里面就学会了自学，就太好了。所以，浙江大学在旧中国培养了很多高等学校比较好的老师，很大一部分都是通过读书班来培养的。另外学生好不好，读书班里面比较能够看得出来，因为是自学嘛，有没有专心，有没有自己的想法，比较容易看到了。所以呢，老师可以看得出来，哪些学生好，哪些学生不适合做研究。所以读书班对浙大来讲是一个很成功的经验。我在浙大的时候听老同学讲，浙大的精华就是读书班。

蒋：它的历史很长了？

王元：对，从一九三几年开始的。

蒋：搞讨论班的时间也挺长的？

王元：我们不是第一次，我们前面已经十几届了。经过讨论班的考验，哪些学生是块什么料，就可以知道了。我们那个时候，1951年的夏天，我们

进入到四年级了，要参加讨论班，那时候苏老师、陈老师他们不领导，是他们的学生领导。实际上从今天的眼光看，他们并不老。当时也不知道为什么，觉得他们老得不得了，用今天的眼光看，当时苏先生的年龄，我想一想不到50岁，觉得老得不得了了，他往那儿一坐，大家都不敢讲话了。陈建功先生也不到60，所以都不领导了，就让下面的学生领导。领导我的老师叫卢庆骏，还有一个是张素诚，是这两个人来领导。卢庆骏是解放前原来浙大的一个老师，解放后刚从美国回来，是芝加哥大学的博士，后来的张素诚是牛津大学的博士，也是刚刚回来。所以他们两个人都是30岁左右，我年纪很轻了，22岁。最早是卢庆骏给我指点了一篇文章，这篇文章是温纳（N. Wiener）写的，他是控制论的创始人。

除此之外，他还给我指了一本书，就是英革姆的《素数分布理论》。实际上现在看温纳的那篇文章并不难，它是傅立叶（Fourier）级数这方面的东西。因为当时我对这方面没有接触过，所以那篇文章看不懂，看不懂就



1953年华罗庚和学生们在数学所门外。左起前排：王元、许孔时，后排左一：李开德，左三：华罗庚，右一：万哲先



青年王元（1958年）

不愿意看，而是把英革姆的书看完了，一个暑假就看完了。

蒋：您是暑假的时候先看，到了开学的时候参加的讨论班？

王元：对，看完了后都写成了笔记。所以到开学的时候，我们就去参加讨论班。实际上最初这个讨论班是分层的，也就是有两个讨论班，“甲种讨论班”是报告论文的，“乙种讨论班”是报告书的，每班大概5、6个学生，一个人上去讲一次，这个礼拜你讲，下个礼拜他讲，讲的东西也不一样。老师坐在下面听，听听你讲的怎么样。等我参加时，讨论班已经不分甲种、乙种了，就是一个讨论班，你看完了以后去报告就行了。我把书都吃透了，至少形式上怎么推导都知道，就这样报告了一个学期。

蒋：这本书报告了一个学期？

王元：实际上并没有报告多少内容，因为不止我一个人报告，轮到我就报告这个东西。老师觉得我还是可以的，有自学的的能力，第一学期就是这些内容。第二学期，张素诚是搞拓扑学，他就指导我念拓扑学的文章。

这时候就不念书了，只念文章，这是四年级下学期的事情，大概他也觉得还可以的。可能是到了四年级讨论班，好像我显得在我们班里面比其他的学生都强一些，我们班也就3、4个学生，老师对我更满意一点，所以毕业以后我就被分配到了科学院。

蒋：当时这个讨论班学生是自愿参加吗？

王元：不是自愿参加的，到了四年级这就是一门课，你不参加就毕不了业，但是这门课不是老师讲，而是由学生讲，实际上相当于我们现在的研究生一样。其实我们在大学四年级就当研究生了。那时候我不爱听课，觉得自学的效率更高，听课太慢了，而且学习被动，不如自己主动学。所以我现在教学生，不太喜欢让学生听我讲的，让他们自己看去。我们很年轻的时候就养成了这个好习惯。

蒋：这样受了前辈的影响。

王元：对，这一段学习对我很有好处，我就提前进入了做研究这个轨道，否则毕了业以后，两三年还不知道该怎么搞，从幼儿园到大学一直是

一个样，老师教你，教多少学多少。我们那时候四年级就等于是自学了，和老师没有太多的关系了。这样毕业以后，独立性很强，对我好处很大，自己知道该怎么搞研究。所以即使我是名师指导的，像华罗庚先生指导我，我也可以跟他研究方向完全不一样，因为我自己已经有一个独立的、该怎么走的思维。如果当时我不来科学院的话，估计也不会太坏，因为我自己已经知道该怎么搞，自己会搞下去了。来这里当然更好一点，因为老师会在大方向上有更好的指点，但华老并不会给你讲具体的知识，你还得自己看，所以先前的训练会带来很大的好处。

我在大学里面获益最大的就是自学，养成了一个独立的习惯，养成了一个不依靠老师的习惯。因为你要做学问早晚要走上这条路，不能总等着老师教你，像幼儿园的小朋友一样。总有一天你要离开这个阶段，能适当地早一点最好。当然太早也不行，因为自己容易乱来，会走上邪路。如果总是按部就班的话，那你比较晚才能进入研究，很可能错过了创造力最旺

盛的时期。

蒋：那个讨论班当时卢庆骏老师和张素诚老师有没有一些具体的指导？

王元：就是听听你讲得不对，给你指出来。实际上可能对我讲的东西，他们还没有我熟悉，这是不奇怪的，不见得指得出多少错来。

蒋：为什么呢？

王元：因为这是很专门的东西，他也不见得有多高，像英革姆的《素数分布理论》，他懂一点。那时候他们在国外刚得了博士回来，就像是我们的博士后差不多。

蒋：等于一个刚毕业的博士生在指导你们。

王元：对，他们自己的研究也不是这个，就是附带指导一下，你讲给他听，等于他也学了。

蒋：当时那个课陈先生和苏先生去听吗？

王元：他们不去，他们有自己的事。他们那个时候就叫老前辈了，五、六十岁都是老前辈了，不干这些事情了。像我们读的英革姆的《素数分布理论》，华罗庚先生是个大内行，卢庆骏懂得不多，这是说实在话，因为卢庆骏是搞傅立叶分析的，也可能他看过这本书。反正对我的帮助是很大的，使得我到了数学所之后，自学的能力很强，独立工作的能力也很强。

蒋：那对您以后指导学生也有影响吗？

王元：这个方式是很重要的，跟我以后指导学生有关系，因为我教学生不是太像教小学生、中学生、幼儿园那样的教法，而是培养他们自己的独立意识。现在有一个错误的观念，就是我们要培养高素质的人才，这个提法是错误的，因为高素质的人才绝对不是培养出来的，是自己奋斗出来的，哪一个高素质人才是培养出来的？



华罗庚与王元（1980年代）

你就给他一个环境，顶多你指一条路，他对你这一条路没有兴趣就免谈，他要能成才，他是靠自己奋斗。实际上我在大学里通过讨论班就明白了这个道理，我要再深入地搞下去，就得靠自己，老师不可能再指导你了。

蒋：对。

王元：当然毕业了之后，碰到华罗庚先生，他当然是这方面的大专家，像英革姆的书他很熟悉，他当然知道的比我多。但是我搞的是筛法，他也是一个外行，他没有我知道的多，这是显然的事情。

蒋：看来自学能力特别重要。

王元：独立特别重要，依靠老师是错误的观念，这种错误观念不纠正的话，这个人是不能成才的。

蒋：是。

王元：现在你对学习数学有一点印象了吧？

蒋：嗯，有一些印象了。

王元：我要强调一点的是，在大学里面，我就已经知道怎么去查文献，怎么去自学，怎么去找方向。毕业以后，你找到一个名师也好，找到一个不太有名的老师也好，都是要靠自己搞，不需要别人判断。如果这个过程不早

养成的话，毕业以后要耽误很多年，才有可能成才。有的学生很奇怪，经常问我到底该干什么啊，这不是天大的笑话嘛。你自己连干什么都不知道，那你还呆在这儿干什么？这种笑话真是太多，从我毕业一直到现在都有很多。有一次我在电梯里还碰到一个年轻人，他问我，王老师，我们到底怎么才能把数学学好啊？我说这在电梯里一言难尽啊。后来他也觉得不是一两句话可以说得清楚

的。你怎么学好数学你都不知道，还需要我来告诉你吗？

蒋：他可能是没有办法了。

王元：他看来是没有办法了，所以见到一个有名的人就赶紧取取经，但这是没有经好取的。我也是运气好，如果我在大学里受的教育就像现在幼儿园和中学、小学这种教育，那就惨了，毕业了以后还要重头来起，不知道什么叫自学，也不会查文献，什么都得依靠老师。尤其你遇到的老师又是华罗庚，他轻易不跟你讲话的，他没有那么多时间跟你废话，那你怎么办？所以他手下的学生有将近一百个，成才的才有几个。成才要靠自己，不能靠他。

蒋：您知道浙大这种本科生的演讲制度现在是否还保持着？

王元：现在浙大肯定没有这个东西了，因为浙大数学系后来就被撤掉了。

蒋：解放后把它撤掉了？

王元：1952年撤掉的。不过现在也不像以前，从前我们同班就四个人，后来走掉一个，剩下三个，全系不到二十个人，那你当然可以精耕细作。现在一来就是几百个人，老师认不得学生，学生也认不得老师，估计用这



华罗庚和他的学生们（1980年代）

第一排左起：潘承洞、陆启铿、华罗庚、陈景润、越民义。第二排左起：李志杰、万哲先、吴方、龚升、王元。第三排左起：陈德泉、陆洪文、计雷

个办法也不好弄。现在的大学是一种普及教育，我们过去是精英教育，这是不同的概念、不同的方式。现在素质好的学生没有那么多，这也是一个问题。

蒋：所以数学的人才……

王元：就不容易出来了。我和华老搞不同的方向，他搞他的，我搞我的，完全是不同的领域。如果我走他的路，那就惨了，那就没有现在的成就了，我不能走他的路，我也鼓励我的学生不走我的路。

蒋：您当年给华老当高等数学的助教，当时班里很多同学日后都成为著名的数学家，您能否谈谈当时的教学情况，以及当年的那些学生们呢？

王元：这个情况可能不全像你说的这样。当时科大刚建立，华罗庚先生就到科大去教微积分。他是很想通过教微积分来写一套书，这套书大概

有五六卷，把整个数学的基础都重新写一遍，让学生来听一听。当时他拉我去，我已经是讲师了，并不是给他当助教，他算是跟我联合开这门课。但是讲义是他自己写的，只有百分之二、三十是我写的，那部分就是抄书。微积分不管谁来教，材料都已经定型，只是讲法不同而已，或者自己有一点点小小的创造，所以有许多抄书的东西他当然就让我替他补充一下。这个课完全要他一个人讲，老实讲他也讲不下来，他不是一条龙嘛，一条龙实际上他讲数学分析，还有一个人开代数。分析他一个人也讲不下来，因为一个礼拜讲八个钟头，他哪吃得消。实际上我讲4个钟头，他讲4个钟头。因为他外面的会多得很，人大常委会什么的，如果他去开会的话，我就替他代课。

蒋：您曾在《华罗庚》一书中提到，

当时华老是讲主要的部分，您是讲教材里面技巧、问题和习题这些东西。

王元：对，当时我们还有助教，助教就是出习题、改习题、答疑。前后有三个人当过我们的助教，第一个助教韩京清，去世了，第二个助教周永佩，第三个助教邓诗涛，这三个助教帮我们管这事。他们不管讲义的事，讲义的事是我管。当然后来华罗庚先生还挺客气，在他书里还写了这个事，说我帮他写讲义什么之类，甚至他还说我跟你合写。我说不能合写，你干了百分之七十以上，我不能跟你合写。而且这也不是什么大事，写微积分，何必合写。第一卷弄完后我就没有再参加这个工作了，我离开了。第二卷是别人在搞，第二卷没有搞完，“文化大革命”就开始了，他的计划就没了。

至于我们班的同学，说实话，我觉得他们平均水平都较高，但是要



左图：王元 17 岁时的画和字。右上图：书法创作，左三起依次为欧阳中石、王元、严加安。右下图：书法创作，左一为欧阳中石（2000 年代）

说特别好的，我还没有发现。从现在来看的话，当时那班孩子中有十来个人还是可以的。

蒋：还都在做数学工作？

王元：这十来个人毕业以后还是有较好成绩的，特别好的也没有，因为他们毕了业以后，没有几年就“文化大革命”了，把他们给冲了，所以他们也是受害者。

蒋：看来我的问题不太准确。

王元：这个班我主要是帮华老写讲义，配合他教书。关于他那个讲义的特点，在最近出版修订他的书的时候，我写了一个导言，这上面都有。

蒋：是《高等数学引论》这本书。

王元：这上面把那些经过都写了。当时华罗庚先生有一个特点，他有时候也偶尔自己来上一两次习题课，他

的习题课就是把微积分的习题换成初等数学，这是他厉害的地方。微积分可以得到一些应用，用初等数学的东西也可以做出来，这是他很有特点的地方，所以他上习题课也很快乐，并不是用现成的方法做，他用初等的方法做一些高等的数学。

蒋：这样做更简单了？

王元：对，更简单了，这是他的特点。他的书有自己的想法。他的另外一个特点，我没写，这里做一点补充，就是华老讲课的起点比较低，起点不高。就说他用比较容易接受的语言，让你好懂一点。他写的《数论导引》也好，《高等数学引论》也好，都是比较易念的，便于自学，不太难，这是他的一个特点。他的起点低，起点低并不是说内容简单，就是说我不是

从很复杂的抽象的框架出发，而是从一些具体的例子慢慢深入进去，这是他的一个特点。

蒋：教学上也是这样的？

王元：对，讲义上也是这样的，尽量讲得很直观很通俗，这是他的一个特点，一大特点。

蒋：当时华老讲课的时候，您也去听吗？

王元：我不去。

蒋：为什么没有去呢？

王元：我没有去听他讲课，是因为他的讲义我都看了，都知道怎么回事了。他这样一位大教授讲课，我也没去听，说起来比较奇怪。如果你什么都听，你就把时间都搞没了。我也不希望我讲课的时候谁都来听，如果你觉得这个东西很简单，觉得你都会

了的话，你不来听是你的自由。如果都不来了，我就不用讲了，是不是？

蒋：您在《华罗庚》一书中提到，当时华老花了很多时间撰写《高等数学引论》，您在想这样做是不是有必要，现在您对这个问题怎么看？

王元：现在还不好说，要历史来判断，因为他培养出来的学生也不见得比北大的好，北大也来了很多学生到我们所来，科大也来了一些。北大的学生程度也很好，并不是按照他的这个方法讲的。学生好不好是由他本身的素质决定的，不是老师决定的，老师起的作用有限的很。所以现在说老师培养学生，这话听着好笑，学生是自己奋斗出来的，跟你培养有什么关系，你给他一个好的环境就行了，你不要成天找他去开会啊，弄这些没用的事。当时班上现在看来也有一些人做了不错的贡献，肖玲就是我们班的，是一个好的女数学家。（注：元老此时在记者的本子上——写下了当年那些他觉得不错的学生名字）这些人还都是可以的。什么叫作还可以，我得给你定义清楚，就是他毕业了以后，如果搞理论的，他能够经常发表文章，在好一点的杂志上发表文章，像国外的一些杂志，还有《中国科学》这些。搞理论这样就行了，他们自己有一个方向在那儿走，带带学生。搞应用的话，他能解决一些事，这也可以了。

蒋：徐广善老师也是那个班的？

王元：对，他们那个班没有数论专业的，不是计算数学就是微分方程。没有人搞基础数学，徐广善是由微分方程转入数论的，所以这些人后来搞理论的都能够独立发表文章，独立工作，像肖玲到外国访问了很多次，去工作一年半的，达到这个水平，也就不错。

蒋：这是您教的第一批学生吗？

王元：第一批学生，我可能教了他们两年基础课。

蒋：除了和华老合作以外，还教



王元与陈省身（1990年代）

了别的课？

王元：别的没有。

蒋：和华老合作了三年？

王元：两年。这两年的讲义就是这次高教出版社出版的《高等数学引论》第一册、第二册。

蒋：元老，您曾和胥鸣伟老师翻译了哈佛大学的教材《高等微积分》，这是出于什么考虑？现在华罗庚先生的《高等数学引论》也刚刚再版，您能否结合这两套教材，讲讲您对高等数学教材和教学的认识？

王元：我跟胥鸣伟翻译的哈佛大学这本书，正好跟华老的风格是截然相反的，华老讲得很简单，这是起点低。这本书起点比较高，起点高不是说就好，起点低不是说就不好。起点高的意思是说，里面讲了很多的东西都是从一些抽象的概念出发，用抽象的公式来定义，定义了半天，可能你脑子就发昏了。但是这也很有必要，数学发展到后来，总是要跟逻辑有更严格的关系。中国没有人按照这个方式讲过高等分析，所以我们觉得它还是有特点的，就把它翻译出来了。翻译出来看着这个书，分析的语言都知

道了，否则的话，很多近代数学的语言都不知道。过去没有同类型的书，所以有必要把它翻译出来。这个书我只翻译了百分之二十，百分之八十是胥鸣伟翻的。

蒋：最后是您来统稿的？

王元：统稿也是他统的，我只翻译了12万字。最近不是搞了很多的教材嘛，其中这本书的起点就很高，里面有些东西华老的书都不写的，像逻辑量词，逻辑的连接词，基本上第一章就是数理逻辑的一些基本概念，第二章是向量空间，一般书上也不会讲这些东西的，它是一种抽象数学的讲法。

蒋：您是翻译的第几章？

王元：我记不起来了，第一、第二章肯定是我翻的，我可能就翻到第二章。里面有一些数理逻辑，过去数理逻辑没有人讲，国内所有的书起点都很低。

蒋：为什么选哈佛大学的教材呢？

王元：丘成桐先生介绍的，我们看了看觉得还不错，国内没有同类型的书，供大家参考一下，所以我们就翻译出来了。我感觉，我们国家搞了