

Riemann



黎曼猜想漫谈(二)

卢昌海

6 错钓的大鱼

在黎曼的论文发表后的最初二三十年里，他所开辟的这一领域显得十分冷清，没有出现任何重大进展。如果把黎曼论文的全部内涵比做一座山峰的话，那么在最初这三三十年里数学家们还只在从山脚往半山腰攀登的路上，只顾星夜兼程、埋头赶路。那高耸入云的山颠还笼罩在一片浓浓的雾霭之中，正所谓高处不胜寒。但到了 1885 年，在这场沉闷的登山之旅中却爆出了一段惊人的插曲：有人忽然声称自己已经登顶归来！

这个人叫做斯蒂尔吉斯 (Thomas Stieltjes, 1856-1894)，是一位荷兰数学家。1885 年，这位当时年方 29 岁的年青数学家在巴黎科学院发表了一份简报，声称自己证明了以下结果：

$$M(N) \equiv \sum_{n < N} \mu(n) = O(N^{1/2})$$

这里的 $\mu(n)$ 是我们在第四节末尾提到过的莫比乌斯函数，由它的求和所给出的函数 $M(N)$ 被称为梅坦斯函数。这个命题看上去倒是面善得很： $\mu(n)$ 不过是一个整数函数，其定义虽有些琐碎，却也并不复杂，而 $M(N)$ 不过是对 $\mu(n)$ 的求和，证明它按照 $O(N^{1/2})$ 增长似乎不象是一件太困难的事情。但这个其貌不扬的命题事实上却是一个比黎曼猜想更强的结果！换句话说，证明了上述命题就等于证明了黎曼猜想（但反过来则不然，否证了上述命题并不等于否证了黎曼猜想）。因此斯蒂尔吉斯的简报等于是声称自己证明了黎曼猜想。

Riemann



斯蒂尔吉斯 (Thomas Stieltjes, 1856-1894), 荷兰数学家

虽然当时黎曼猜想还没有象今天这么热门, 消息传得也远没有象今天这么飞快, 但有人证明了黎曼猜想仍是一个非同小可的消息。别的不说, 证明了黎曼猜想就等于证明了素数定理, 而后者自高斯等人提出以来折磨数学家们已近一个世纪之久, 却仍未能得到证明。与在巴黎科学院发表简报几乎同时, 斯蒂尔吉斯给当时法国数学界的一位重量级人物厄米特 (Charles Hermite, 1822-1901) 发去了一封信, 重复了这一声明。但无论在简报还是在信件中斯蒂尔吉斯都没有给出证明, 他说自己的证明太复杂, 需要简化。

换作是在今天, 一位年青数学家开出这样一张空头支票, 是很难引起数学界的任何反响的。但是十九世纪的情况有所不同, 因为当时学术界常有科学家做出成果却不公布 (或只公布一个结果) 的事, 高斯和黎曼都是此道中人。因此象斯蒂尔吉斯那样声称自己证明了黎曼猜想, 却不给出具体证明, 在当时并不算离奇。学术界的反应多少有点象现代法庭所奉行的无罪推定原则, 即在出现相反的证据之前倾向于相信声明成立。

但是相信归相信, 数学当然是离不开证明的。因此大家就期待着斯蒂尔吉斯发表具体的证明, 其中期待得最诚心实意的当属接到斯蒂尔吉斯来信的厄米特。厄米特自 1882 年起就与斯蒂尔吉斯保持着通信关系, 直至十二年后斯蒂尔吉斯过早去世为止。在这期间两人共交换了 432 封信件。厄米特是当时复变函数论的大家之一, 他与斯蒂尔吉斯的的关系堪称数学家

上一个比较奇特的现象。斯蒂尔吉斯刚与厄米特通信时只是莱顿天文台的一名助理, 而且就连这个助理的职位还是靠了他父亲 (斯蒂尔吉斯的父亲是荷兰著名的工程师兼国会成员) 的关照才获得的。在此之前他在大学里曾三度考试失败。好不容易进了天文台, 斯蒂尔吉斯却“身在曹营心在汉”, 干着天文观测的活, 心里惦记的却是数学, 并且给厄米特写了信。照说当时一无学位、二无名声的斯蒂尔吉斯要引起象厄米特这样的数学元老的重视并不容易, 但厄米特是一位虔诚的天主教徒, 他恰巧对数学怀有一种奇特的信仰, 他相信数学存在是一种超自然的东西, 寻常的数学家只是偶尔才有机会了解数学的奥秘。那么什么样的人能比“寻常的数学家”更有机会了解数学的奥秘呢? 厄米特凭着自己的神秘主义眼光找到了一位, 那就是默默无闻的观星之人斯蒂尔吉斯。厄米特认为斯蒂尔吉斯具有上帝所赐的窥视数学奥秘的眼光, 他对之充满了信任。在他与斯蒂尔吉斯的通信中甚至出现了“你总是对的, 我总是错的”这样极端的赞许。在这种奇特信仰与十九世纪数学氛围的共同影响下, 厄米特对斯蒂尔吉斯关于黎曼猜想的声明深信不疑。

但是无论厄米特如何催促, 斯蒂尔吉斯始终没有



厄米特 (Charles Hermite, 1822-1901), 法国数学家

Riemann

公布他的完整证明。一转眼五年过去了，厄米特对斯蒂尔吉斯依然“痴心不改”，他决定向对方“诱之以利”。在厄米特提议下，法国科学院将1890年数学大奖的主题设为“确定小于给定数值的素数个数”。在厄米特看来，这个大奖将毫无悬念地落到他的朋友斯蒂尔吉斯的腰包里，因为这个大奖主题实质上就是证明素数定理，这比黎曼猜想弱得多。可惜直至大奖截止日期终了，斯蒂尔吉斯依然毫无动静。

但是厄米特也没有完全失望，因为他的学生哈达马(Jacques Hadamard, 1865-1963)提交了一篇论文，领走了大奖——肥水总算没有流入外人田。哈达马论文的主要内容正是我们在上节中提到的对黎曼论文中连乘积公式的证明。这一论文虽然离素数定理的证明还有一段距离，却已足可获得大奖。几年之后，哈达马再接再厉，终于一举证明了素数定理。厄米特放出去的这根长线虽没能如愿钓到斯蒂尔吉斯及黎曼猜想，却错钓上了哈达马及素数定理，斩获亦是颇为丰厚(素数定理的证明在当时其实比黎曼猜想的证明更令数学界期待)。

那么斯蒂尔吉斯呢？没听过这个名字的读者可能会觉得他是一个浮夸无为的家伙，事实却不然。斯蒂尔吉斯在分析与数论的许多方面都做出过重要的贡献。他在连分数方面的研究为他赢得了“连分数分析之父”的美誉，以他名字命名的斯蒂尔吉斯积分更是声名远播。但他那份哈代电报式的有关黎曼猜想的声明却终究没能为他赢得永久的悬念。

现在数学家们普遍认为斯蒂尔吉斯关于 $M(N)=O(N^{1/2})$ 的证明是错误的，不仅如此，甚至连命题 $M(N)=O(N^{1/2})$ 本身是否成立也已经受到了越来越多的怀疑。这是因为比 $M(N)=O(N^{1/2})$ 稍强、被称为梅滕斯(Mertens)猜想的命题： $M(N)<N^{1/2}$ 已于1985年被Andrew Odlyzko与Herman te Riele所否定。受此影响，目前数学家们倾向于认为 $M(N)=O(N^{1/2})$ 也并不成立，不过到目前为止还没人能够证明(或否定)这一点。

7

从零点分布到素数定理

素数定理自高斯与勒让德以经验公式的形式提出(详见第三节)以来，许多数学家对此做过研究。其中比较重要的结果是由俄国数学家切比雪夫(Pafnuty

Chebyshev, 1821-1894)做出的。早在1850年，切比雪夫就证明了对于足够大的 x ，素数分布 $\pi(x)$ 与素数定理给出的分布 $\text{Li}(x)$ 之间的相对误差不超过11%。比这更早些，切比雪夫还证明了：如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\pi(x)/[x/\ln(x)]\}$ 存在，它必定等于1。切比雪夫的研究对于黎曼的工作及后来人们对素数定理的证明都有影响。

但在黎曼1859年的工作以前，数学家们对素数定理的研究主要局限在实数域中。从这个意义上讲，即使撇开具体的结果不论，黎曼建立在复变函数基础上的工作仅就其方法而言，也是对素数研究的一个重大突破。这一方法上的突破为素数定理的最终证明铺平了道路。

在第五节的末尾我们曾经提到，黎曼对素数分布的研究之所以没能直接成为素数定理的证明，是因为人们对黎曼 ζ 函数非平凡零点的分布还知道得太少。那么为了证明素数定理，我们起码要知道多少有关非平凡零点分布的信息呢？这一点到了1895年随着曼戈尔特(Hans Carl Friedrich von Mangoldt, 1854-1925)对黎曼论文的深入研究而变得明朗起来。曼戈尔特的研究我们在第五节中已经提到过，正是他最终证明了黎曼关于 $J(x)$ 的公式。但是曼戈尔特工作的价值比仅仅证明黎曼关于 $J(x)$ 的公式要深远得多。在他的研究中使用了一个比黎曼的 $J(x)$ 更简单有效的辅助函数 $\Psi(x)$ ，它的定义为：

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

其中 $\Lambda(n)$ 被称为曼戈尔特函数，它对于 $n=p^k$ (p 为素数， k 为自然数)取值为 $\ln(p)$ ；对于其它 n 取值为0。运用 $\Psi(x)$ ，曼戈尔特证明了一个本质上与黎曼关于 $J(x)$ 的公式等价的公式：

$$\Psi(x) = x - \sum_{\rho} \left(\frac{x^{\rho}}{\rho} \right) - \frac{1}{2} \ln(1-x^{-2}) - \ln(2\pi)$$

其中有关 ρ 的求和与黎曼的 $J(x)$ 中的求和一样，也是先将 ρ 与 $1-\rho$ 配对，再依 $\text{Im}(\rho)$ 从小到大的顺序进行。

注 7.1

比这更早些，切比雪夫还证明了：如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\pi(x)/[x/\ln(x)]\}$ 存在，它必定等于1。切比雪夫的研究对于黎曼的工作及后来人们对素数定理的证明都有影响。

Riemann

很明显，曼戈尔特的 $\Psi(x)$ 表达式比黎曼的 $J(x)$ 简单多了。时至今日， $\Psi(x)$ 在解析数论的研究中差不多已完全取代了黎曼的 $J(x)$ 。引进 $\Psi(x)$ 的另一个重大好处是早在几年前，上文提到的切比雪夫就已经证明了：素数定理 $\pi(x) \sim \text{Li}(x)$ 等价于 $\Psi(x) \sim x$ （为了纪念切比雪夫的贡献，曼戈尔特函数也被称为第二切比雪夫函数）。

将这一点与曼戈尔特的 $\Psi(x)$ 表达式联系在一起，不难看到素数定理成立的条件是 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\rho} (x^{\rho-1}/\rho) = 0$ 。但是要让 $x^{\rho-1}$ 趋于零， $\text{Re}(\rho)$ 必须小于 1。换句话说黎曼 ζ 函数在直线 $\text{Re}(s)=1$ 上必须没有非平凡零点。这就是我们为证明素数定理而必须知道的有关黎曼 ζ 函数非平凡零点分布的信息（不过由于所处理的是无穷级数，严格的证明并不如我们叙述的那样简单）。由于黎曼 ζ 函数的非平凡零点是成对的方式出现的，因此这一信息也等价于 $0 < \text{Re}(\rho) < 1$ 。

读者们大概还记得，在第五节中我们曾经证明过黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于 $0 \leq \text{Re}(s) \leq 1$ 的区域内。因此为了证明素数定理，我们所需知道有关非平凡零点分布的信息要比我们已知的（也是当时数学家们已知的）略多一些（但仍大大少于黎曼猜想所要求的）。这样，在经过了切比雪夫、黎曼、哈达马和曼戈尔特等人的卓越努力之后，我们离素数定理的证明终于只剩下了最后一小步：即把已知的零点分布规律中那个小小的等号去掉。这也正是我们在第五节中提到的黎曼在计算 $J(x)$ 的过程中对与零点有关的级数进行单项积分时隐含的条件。这一小步虽也绝非轻而易举，却已难不住在黎曼峰上攀登了三十几个年头，为素数定理完整证明的到来等待了一个世纪的数学家们。

曼戈尔特的结果发表的第二年（1896 年），上节提到的哈达马与比利时数学家 Charles de la Vallée-Poussin 就几乎同时独立地给出了证明，从而完成了自高斯以来数学界的一个重大心愿。那时斯蒂尔吉斯已经去世两年了。即便如此，哈达马在发表他的结果时仍然谦虚地写道，他之所以发表有关黎曼 ζ 函数在 $\text{Re}(s)=1$ 上没有零点的证明，是因为斯蒂尔吉斯有关半平面 $\text{Re}(s) > 1/2$ 上没有零点的证明尚未发表，并且那一证明可能要困难得多。

经过素数定理的证明，人们对于黎曼 ζ 函数非平凡零点分布的了解又推进了一步，那就是：黎曼 ζ 函

数的所有非平凡零点都位于复平面上 $0 < \text{Re}(\rho) < 1$ 的区域内。在黎曼猜想的研究中数学家们把这个区域称为 critical strip。

素数定理的证明——尤其是以一种与黎曼的论文如此密切相关的方式所实现的证明——让数学界把更多的注意力放到了黎曼猜想上来。四年后（1900 年）的一个夏日，两百多位当时最杰出的数学家会聚到了巴黎，一位 38 岁的德国数学家走上了讲台，做了一次永载数学史册的伟大演讲。演讲的题目叫做“数学问题”，演讲者的名字叫做希尔伯特 (David Hilbert, 1862-1943)，他恰好来自高斯与黎曼的学术故乡——群星璀璨的哥廷根 (Göttingen) 大学。他是哥廷根数学精神的伟大继承者，一位与高斯及黎曼齐名的数学巨匠。希尔伯特在演讲稿中列出了二十三个对后世产生深远影响的数学问题，黎曼猜想被列为其中第八个问题的一部分，从此成为整个数学界瞩目的难题之一。

二十世纪的数学大幕在希尔伯特的演讲声中徐徐拉开，黎曼猜想也迎来了一段新的百年征程。

零点在哪里？

随着黎曼论文中的外围命题——那些被黎曼随手写下却没有予以证明的命题——逐一得到证明，随着素数定理的攻克，也随着希尔伯特演讲的聚焦作用的显现，数学界终于把注意力渐渐投向了黎曼猜想本身，投向了那座巍峨的主峰。

不知读者们有没有注意到，我们谈了这么久的黎曼 ζ 函数，谈了那么久的 ζ 函数的非平凡零点，却始终没有谈及过任何一个具体的非平凡零点。这也是黎曼论文本身一个令人瞩目的特点：即它除了没有给所涉及到的许多命题提供证明外，也没有给所提出的猜想提供数值计算方面的支持。黎曼叙述了许多有关 ζ 函数非平凡零点的命题（比如第五节中提到的三大命题），却没有给出任何一个非平凡零点的数值！

倘若那些非平凡零点是容易计算的，倒也罢了，可是就象被黎曼省略掉的那些命题个个都令人头疼一样，黎曼 ζ 函数的那些非平凡零点个个都不是省油的灯。

它们究竟在哪里呢？

直到 1903 年（即黎曼的论文发表后的第 44 个