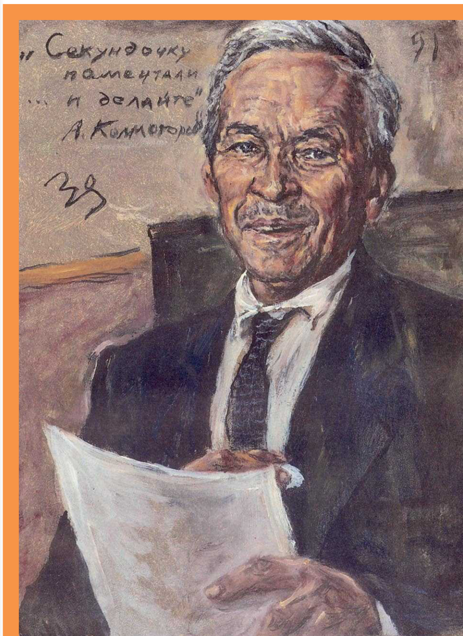
LINK 网络链接

# 柯尔莫哥洛夫的数学观与业绩

伊藤清 / 文　佚名 / 译

当我得知苏联伟大的数学家，84 岁的柯尔莫哥洛夫 (Andreyii Nikolaevich Kolmogorov) 教授于 1987 年 10 月 20 日离开人世时，我感到像是失去了支柱那样悲哀与孤寂。在我还是学生时（1937 年）读了他的名著《概率论的基本概念》之后，便立志钻研概率论，并持续了 50 年之久。对于我来说，柯尔莫哥洛夫就是我的数学基础。

我与柯尔莫哥洛夫教授仅会过 3 次面。第一次是 1962 年国际数学家大会 ( 于瑞典首都斯德哥尔摩召开 ) 时，开幕式前我在大厅里漫步。当听见“Ito ? Kolmogorov.” 的亲切的招呼声时，我又惊又喜。他用德语问到“你多大年龄?” 我答道：“Seiben und vierzig.” 他再问：“DreiBig?”（三十几？）大概日本人都显得年轻，我也许被看得年轻了 10 岁。又过了二三日，H. Cramer 教授（全瑞典的大学校长 (Chancelor)，概率论、解析数论的专家）在家里举行了晚餐会，招待出席会议的大约 10 名有关概率方面的学者。柯尔莫哥洛夫 , J.L. Doob 与我都在其中。



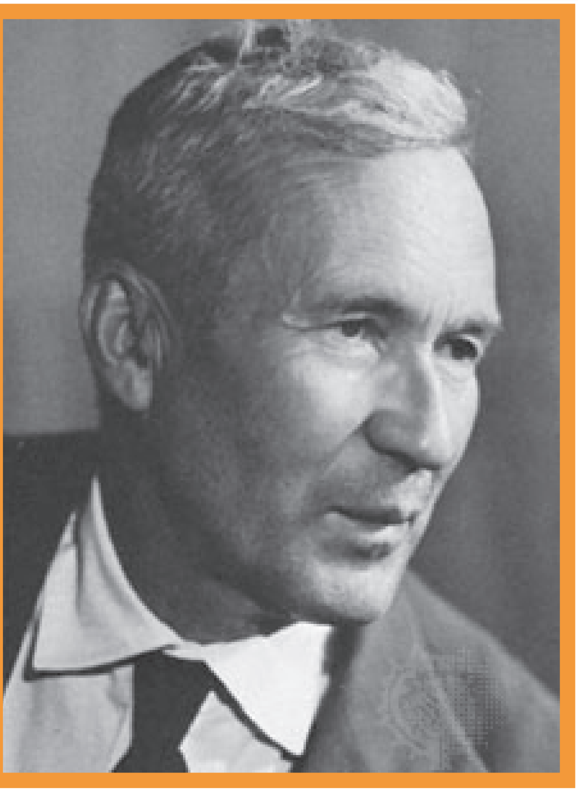
柯尔莫哥洛夫的画像

第二次是 1978 年，在参加了国际数学家大会（于芬兰首都赫尔辛基召开）之后，我又出席了概率统计国际学术讨论会 (Vilnius, Lihtuania, 前苏联 )，回国途中，路经莫斯科时，柯尔莫哥洛夫招待 Varadhan ( 纽约大学柯朗研究所 )、Prokhorov（苏联科学院）和我在克里姆林宫旁的一座高雅的餐厅吃了午餐。当时已听说柯尔莫哥洛夫对高中的数学教育很热心，招收了一些优秀的学生，亲自开课教授。我便询问了其内容。他举例说：比如向学生展示简单的向量场（速度场）的图，并要求他们画出积分曲线（轨迹）；又如让学生考虑具体的分枝过程的问题等等，以培养学生的数学直观能力。

第三次是 1983 年在 Tbilisi (Georgia, 前苏联 ) 召开的日苏概率统计学术讨论会上。当时，尽管他的健康状况不大好，仍然作了讲演，并在宴会上努力创造活跃的气氛。显然年轻的一代是很崇敬他的。

柯尔莫哥洛夫在数学的几乎所有领域中，都提出了独创的思想，导入了崭新的方法，他的业绩是非常辉煌的。然而，我见到他时给我留下的印象却是不修边幅的温厚的君子形象，这也许正是伟大数学家的形象吧。

柯尔莫哥洛夫的论文我自认为基本上都好好地读过了，在撰写本稿时，我又对他整个的研究成果做了一个直接或间接的调查。对其研究的广度和深度不得不叹服。由于时间和篇幅的限制，我仅向读者谈一些并不全面的自己的感受。



柯尔莫哥洛夫 (1903-1987)

吉泽尚明（京都大学）、池田信行（大阪大学）二位教授及京都大学数理研图书室的各位帮助我查找了资料，在此我表示衷心的感谢。

## 柯尔莫哥洛夫简历

根据 B. V. Gnedenko 在柯尔莫哥洛夫 70 寿辰时的讲演， 柯尔莫哥洛夫于 1903 年诞生于俄罗斯的村镇（现在为市）Tambov。父亲是农学家，母亲在生下柯尔莫哥洛夫后不久便离开人世，他是被叔母等抚养长大的。1920 年（17 岁）进入莫斯科大学之前，他当过列车上的乘务员，业余时间写了关于牛顿力学定律的论文，论文的原稿未能保存下来，但我们可以想象他是多么早熟的天才。那时，俄国革命（1917）已经爆发，我很想知道他当时所处的环境，很遗憾没有有关的资料。

1920 年进入莫斯科大学，最初对俄国的历史感兴趣，还调查了 15 ~ 16 世纪的诺布哥罗德的财产登记。以后参加了 V.V. Stepanov 的傅里叶级数讨论班，并于 1922 年（19 岁）写出了关于傅里叶级数，解析集合的著名论文，震动了学术界。其后犹如天马行空，连续发表了许多重要的研究成果。1925 年莫斯科大学毕业，1931 年当大学教授，1933 年任大学数学研究所所长，1937 年成为苏联科学院院士。至 1987 年逝世止，对数学的研究教育作出了很多重大的贡献。

## 柯尔莫哥洛夫的数学观

了解柯尔莫哥洛夫的数学观的最好的资料，大概要属苏联大百科辞典中他所执笔的“数学”部分吧。已经出了英文版，我读了英文版，与原文（俄语）比较，英文版稍微缩略了一些，在这篇文章中，他先阐述了其数学观，然后通述了自古至今的数学史，并且从他的数学观出发，详细描述了这个历史的各个阶段，它可以说是为数学家、科学家们所写的数学史。我饶有兴趣地一口气读完了全篇。要说明柯尔莫哥洛夫的数学观，不仅应当看这篇文章的开始部分，也应当参照占该文大部分的数学史，但由于篇幅及时间的限制，我仅将文章的开始部分简要介绍如下。

根据柯尔莫哥洛夫的观点，数学是现实世界中的数量关系与空间形式的科学。

(1) **因此数学的研究对像是产生于现实中的。然而作为数学加以研究时，必须离开现实的素材（数学的抽象性）。**

(2) **但是，数学的抽象性并不意味着完全脱离于现实素材。需要用数学加以研究的数量关系与空间形式的种类，应科学技术的要求，是不断增加着的。因此上面定义的数学内容在不断地得到丰富。**

**数学与诸科学：** 数学的应用是多种多样的，从原理上讲，数学方法的应用范围是无边际的，即物质的所有类型的运动都可以用数学加以研究。但是数学方法的作用与意义在不同情况下是不同的。用单一的模式来包罗现象的所有侧面是不可能的。认识具体的东西（现象）的过程中总是具有下面两个互相缠绕的倾向。

(1) **仅将研究对象（现象）的形式分离出来，对这个形式作逻辑上的解析。**

(2) **弄清与已经确立的形式所不相符的「现象的方面」，向具有更多的可塑性，更能完整地包含「现象」的新的形式转化。**

如果在研究的过程中必须时刻考察现象的本质上新的侧面，则研究中的困难主要体现在上面的 (2) 的部分。这样的现象的研究（如生物学、经济学、人文科学等）中，数学方法就不是主要的。在这种时候，对现象的所有方面的辨证分析会由于数学形式反而变得含糊。

与此相反，如果用比较简单的、稳定的某种形式便可以把握研究对象（现象），并且在这个形式的范围内产生了在数学上需要加以特殊研究（特别是需要创造新的记号和计算方法）的困难而复杂的问题时，这种现象的研究（如物理学）则在数学方法的支配范围内。

做了这些一般性的论述后，首先详细说明了行星运动完全是在数学方法的支配范围内，在这里数学形式是对于有限质点系的牛顿的常微分方程。

从力学转向物理学，数学方法的作用几乎不减，但应用中的困难明显增加。在物理学中，几乎没有不使用高等数学技术（如偏微分方程理论、泛函分析）的领域。但是研究中出现的困难往往不在于数学理论的推导过程中，而在于“为运用数学所作的假设的选择”和“由数学手段所得结果的解释”中。

数学方法具有包含从考察的某个水平开始，向更高的、本质上新的水平转移这样一个过程的能力。这种例子在物理理论中是可以见到许多的：扩散现象便是一个古典的好例子。从扩散的宏观理论（抛物型偏微分方程）向更高的微观水平的理论（用独立的随机过程来描述溶液中粒子随机运动的统计力学）转移，从后者出发运用大数定律，可导出把握前者的微分方程， 柯尔莫哥洛夫对此种情形作了更加详细具体的说明。

同物理学相比，在生物学中数学更处于从属地位。在经济学和人文科学中的，这种情况就更加突出了，在生物学和社会科学中数学方法的应用主要是以控制论的形式进行的。在这些学科中，数学的重要性以辅助科学——数理统计学的形式保留几分，但在社会现象的精确分析中，各个历史阶段中的本质性差异的侧面是占主导地位的，因而数学方法常常要靠边站。

数学与技术、算术、初等几何的原理，正像古代数学史所表明的那样，是从日常生活的需要中产生的。其后的新的数学方法或思想也是受到天文学、力学、物理学等满足实际需要的学科的影响而产生的，但是数学与技术（工程学）的直接联系至今常常是通过已有的数学理论在技术中的应用这样一个形式来实现的。当然还须指出，根据技术上的要求而直接产生新数学的一般理论这种例子也是有的〔例如，最小二乘法（测地），操作数法（电气工程）。作为概率论的新分支的信息论（通信工程），数理逻辑学的新分支，微分方程的近似解法，数值解法等〕。

高深的数学理论使得科学计算的方法急速地发展起来。而科学计算在解决原子能利用，宇宙开发中的问题等大量的实际问题时扮演了主要的角色。

柯尔莫哥洛夫在后面的数学史的叙述中也总是注重数学与其它诸学科的关联，同时也高度评价了由于数学内部

的要求而推动的纯数学的发展。例如，在实际问题的应用这方面，古代希腊要落后于巴比伦，然而在数学的理论方面，希腊远远领先于巴比伦。他尤其赞颂了“存在无限多个素数”、“等腰直角三角形的斜边与另一边之间不存在公约数”等伟大发现。按着他详细说明了实际主义的巴比伦数学与理想主义的希腊数学是如何经过中世纪的阿拉伯数学，发展至欧洲的近代数学的过程，非常有趣。我从这个历史中学到了许多史实。例如，我以前知道变换群这个概念是在18世纪后半叶至19世纪初，由 Lagrange（分析）、Galois（群论）等有效地使用了的。但我还想知道现在大学里讲授的（抽象）群的定义到底是由谁给出的。根据柯尔莫哥洛夫的数学史，这个定义是由 A. Cayley 在 19 世纪中叶所给出的。

总之，柯尔莫哥洛夫的数学观是由他的数学上的独创性，对于数学应用所抱有的激情及对于数学发展的历史所具有的洞察。这几个方面所组成的，难以用一言来概之。如果一定要用一句话来总结，也许可以这样说：柯尔莫哥洛夫把数学看成为可以无限制地成长的“生物体”。

## *柯尔莫哥洛夫的数学业绩*

柯尔莫哥洛夫写了上百篇论文，从中可以看出其特点是：“广泛的研究领域”、“引入新观点的独创性”及“明快的叙述”，其研究领域包括实变函数论、数学基础论、拓扑空间论、泛函分析、概率论、动态系统、统计力学、数理统计、信息论等多个分支。下面结合背景概述一下这些研究。

### 实变函数论

柯尔莫哥洛夫在莫斯科大学读书时参加了 Stepanov 的傅里叶级数讨论班，从那时（1921）开始，他对数学产生了与趣。当时，主要研究连续函数的微积分学正在向研究可测函数的实变函数论发展。这一新的数学领域受到了极大的关注。他于 1922 年（19 岁）时，通过引入 集合演算，证明了包含“Borel 不可测解析集合的存在定理 ”的新的定理。同年，他还成功地研究了“（形式上）傅里叶级数在几乎所有点上（以后又研究了所有点上）发散的可积函数的构成”。关于傅里叶级数、正交函数的展开，他也写了几篇论文。他还尝试了勒贝格（Lebesgue）积分的推广，涉及了 Denjoy 积分的研究。这些大体上是 1930 年以前的研究工作。

### 概率论基础

柯尔莫哥洛夫在概率论力面的一大功绩是用测度论的语言将概率论确立为现代数学的一个领域。以往对偶然事件、偶然量未加定义而使用。柯尔莫哥洛夫看出了概率与测度的同构型，在概率测度空间 $(\Omega,F,P)$ 上，分别将偶然事件定义为 Ω 的 F- 可测子集，偶然事件的概率定义为这个子集的 P- 测度，偶然量定义为 Ω 上的 F- 可测函数，其平均值由积分定义。这样，概率论的理论展开就变得明确而容易了。

如此将概率作为测度来把握的方法，对于特殊问题 E. Borel，N. Wiener（布朗运动）已经做过尝试。但用这个方法来对待所有问题的是柯尔莫哥洛夫的《概率论的基本概念》。他证明了在一般情况下可以有目的地构造出

柯尔莫哥洛夫学习和工作的莫斯科大学